

**CALCUL DES FONCTIONS D'AMBIGUITE LARGE BANDE PAR TRANSFORMEE DE MELLIN**

**OVARLEZ Jean-Philippe**

**ONERA, BP72, F 92322 Chatillon Cedex**

**RÉSUMÉ**

L'article présente une méthode originale de calcul des fonctions d'ambiguïté large bande fondée sur la transformation de Mellin discrète qui est particulièrement adaptée au calcul de formes large bande contenant des dilatations de signaux (transformée en ondelettes, représentation temps fréquence affine). L'algorithme de calcul rapide est détaillé de façon précise et plusieurs exemples de fonctions d'ambiguïté calculées par cette méthode sont présentées.

**I. Introduction**

La fonction d'ambiguïté est une fonction de discrimination entre un signal et sa transformée par un opérateur (translation de temps, de fréquence, compression, etc...). Elle possède un nombre de variables égal à celui des paramètres de l'opérateur, et est maximale pour des valeurs rendant invariante la transformation. L'étude de la variation de cette fonction autour du maximum pour diverses valeurs de paramètres de l'opérateur permet de déterminer le niveau de ressemblance qui peut exister entre les deux signaux.

La fonction d'ambiguïté joue un rôle important dans beaucoup de domaines tels que le radar ou le sonar (détection de cibles [1], estimation des paramètres liés aux cibles [2], synthèse de codes [3] ayant des performances données (lobes secondaires réduits, grande résolution, etc..), évaluation du pouvoir de résolution de codes radar [4]).

Sous les hypothèses simplificatrices de Woodward [5] énoncées ci dessous,

- vitesse relative des cibles  $v$  négligeable devant la célérité  $c$  dans le milieu de propagation
- signal bande étroite  $B \ll f_0$  (Bande  $B$ , fréquence porteuse  $f_0$ )
- $BT < \frac{c-v}{2v}$  (BT produit bande  $B$  par durée  $T$ )

la fonction d'ambiguïté bande étroite, construite sur le signal analytique  $z(t)$  ou sur sa transformée de Fourier  $Z(f)$ , prend les deux formes équivalentes suivantes:

$$X(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) z^*(t-\tau) e^{-2i\pi\nu t} dt \quad (1)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Z(f) Z^*(f-\nu) e^{2i\pi f \tau} df \quad (2)$$

où  $\nu = \frac{2v}{c} f_0$  fréquence Doppler  
 $\tau = 2R_0/c$  retard ( $R_0$  distance radar-cible)

Dès qu'une des hypothèses de Woodward n'est pas respectée, il est nécessaire de considérer la

**ABSTRACT**

This paper presents an original method of broad-band ambiguity function computation. This method is based on the discrete Mellin transform which is particularly adapted to the computation of expressions involving stretched forms of the signal (wavelet transform, affine time-frequency representation). The fast algorithm is clearly detailed and several examples of broad-band ambiguity functions computed with this technique are presented.

fonction d'ambiguïté large bande [6][7] (ou généralisée) sous peine d'obtenir des résultats complètement erronés (Fig 2). Les deux formes équivalentes qui la caractérisent sont données par:

$$X(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) z^*\left(\frac{t}{a} - b\right) dt \quad (3)$$

$$= \sqrt{a} \int_{-\infty}^{+\infty} Z(f) Z^*(af) e^{2i\pi abf} df \quad (4)$$

où  $a = \frac{c-v}{c+v}$  facteur de compression Doppler

$b = 2R_0/(c-v)$  retard ( $R_0$  distance radar-cible)

L'utilisation de méthodes traditionnelles pour obtenir la fonction d'ambiguïté à partir des deux expressions (3) ou (4) nécessite un volume de calcul très important. Ceci s'explique par le fait que ces quantités sont des formes intégrales très délicates à expliciter analytiquement et que, même numériquement, on se heurte à deux difficultés:

- nécessité de transformer un signal échantillonné en une version dilatée ou compressée (utilisation d'interpolations, de sur-échantillonnage, etc..).
- temps de calcul très important associé au volume d'opérations à effectuer.

Une alternative intéressante consiste à utiliser le principe de la phase stationnaire [8], mais le résultat n'est qu'une forme approximée.

Le présent article propose une approche nouvelle sous la forme d'un algorithme de calcul rapide qui, sans approximation ni interpolation, permet d'obtenir un résultat exact. Celui-ci est fondé sur les transformées de Mellin [9] qui sont particulièrement adaptées au calcul de formes large bande contenant des dilatations (imagerie par transformée d'ondelette représentations temps-fréquence affines et sa régularisée [10][11][12][13]).

**II. La transformée de Mellin**

**II.1 Définition**

La transformée de Mellin est définie sur le signal analytique  $Z$  par la relation:

$$M^{\xi}[Z](\beta) = \int_0^{+\infty} Z(f) e^{2i\pi\xi f} f^{2i\pi\beta} df / \sqrt{f} \quad (5)$$

et par sa forme réciproque:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} M^{\xi}[Z](\beta) e^{-2i\pi\xi f} f^{-2i\pi\beta} d\beta / \sqrt{f} \quad (6)$$

Cette transformée est unitaire, c'est à dire:

$$\int_0^{+\infty} Z_1(f) Z_2^*(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} M^{\xi}[Z_1](\beta) M^{\xi*}[Z_2](\beta) d\beta \quad (7)$$

et est invariante, à une phase près, au changement d'échelle:

$$\begin{aligned} Z(f) &\xrightarrow{UZ} UZ(f) = \sqrt{a} e^{-2i\pi\xi(1-a)f} Z(af) \\ \downarrow &\quad \downarrow \\ M^{\xi}[Z](\beta) &\longrightarrow M^{\xi}[UZ](\beta) = a^{-2i\pi\beta} M^{\xi}[Z](\beta) \end{aligned} \quad (8)$$

Toutes les autres propriétés importantes qui ont permis de construire la transformée discrète et de donner une interprétation de la variable  $\beta$  (paramètre d'hyperbole  $t=\xi+\beta/f$  dans le plan temps-fréquence) peuvent être consultées dans [8]. Cette transformée s'écrit:

$$M^{\xi}[Z]\left(\frac{p}{N \ln q}\right) = \ln q \sum_{k=L}^{L+N-1} q^{k/2} e^{2i\pi\xi q^k} Z(q^k) e^{2i\pi\frac{kp}{N}} \quad (9)$$

$0 \leq p \leq N-1$

où  $L$  vérifie  $q^L = f_1$  ( $f_1$  fréquence min de  $Z$ )

La transformée de Mellin est calculée sur les échantillons géométriques du signal fréquentiel par algorithme rapide (Transformée de Fourier Rapide).

La raison géométrique  $q$  d'échantillonnage du signal  $Z$  doit vérifier une condition de non recouvrement:

$$1/\ln q > |\beta_2 - \beta_1| \quad (10)$$

où  $[\beta_1, \beta_2]$  est le support de  $M^{\xi}[Z]$

### II.2 Théorème d'échantillonnage

Si le signal est localisé dans le plan temps fréquence (largeur de bande  $B$  autour de la fréquence centrale  $f_0$ , durée  $T$ ), il est possible de déterminer le paramètre  $\beta_0$  des hyperboles qui délimitent parfaitement ce signal dans le plan temps-fréquence, comme le montre la figure 1:

$$\beta_0 = (f_0 + B/2) T/2 \quad (11)$$

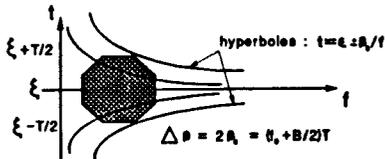


Fig.1: Localisation d'un signal entre les hyperboles d'équation  $t=\xi+\beta_0/f$  et  $t=\xi-\beta_0/f$

Grâce à la formule de Moyal et à l'étude des représentations temps-fréquence affines des signaux [10], il est facile d'expliciter la relation suivante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} P(t, f) f^{-1} \delta(t - \xi - \beta/f) df = |M^{\xi}[Z](\beta)|^2 \quad (12)$$

Le carré du module de la transformée de Mellin du signal  $Z$  est égal à l'intégrale de sa représentation temps-fréquence affine  $P(t, f)$  sur un réseau d'hyperboles indexées par  $\beta$  dans le plan temps-fréquence. Ainsi, lorsque le signal est localisé en temps et en fréquence, il existe un certain  $\beta$  donné par (11) à partir duquel l'intégrale de  $P(t, f)$  devient nulle. La transformée de Mellin d'un signal localisé en temps et en fréquence est donc elle-même localisée.

La condition de non recouvrement (10) s'écrit alors:

$$1/\ln q > |\beta_2 - \beta_1| = 2\beta_0 \quad (13)$$

avec  $\beta_0$  défini par la relation (11)

Il vient:

$$1/\ln q > BT(1+2/R)/2 \quad (14)$$

avec  $BT$  produit bande durée du signal  
 $R$  largeur de bande relative  $B/f_0$

Si le support fréquentiel de  $Z$  est  $[f_1, f_2]$ , la raison  $q$  doit être choisie de manière à ce que la restriction de la forme dilatocyclée  $\bar{Z}$  de  $Z$  (périodisation de  $Z$  à toutes les échelles sur le demi axe des fréquences positives [9]) sur  $[f_1, f_2]$

$$\bar{Z}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q^{n/2} Z(Q^n f) e^{2i\pi\xi f(1-Q^n)} \quad (15)$$

soit égale à  $Z$ , ce qui implique:

$$Q = q^N > f_2/f_1 \quad (16)$$

Le nombre de points  $N$  qui caractérisent parfaitement  $M^{\xi}[Z]$  est déduit de (14) et (16):

$$N > BT (1 + 2/R) \ln \left[ \frac{1 + R/2}{1 - R/2} \right] / 2 \quad (17)$$

Si le signal est à bande étroite, on peut remarquer que toutes les dilatations deviennent des translations, que la transformée de Mellin devient transformée de Fourier, et que le nombre de points  $N$  devient le  $BT$  du critère de Nyquist.

Avec le théorème d'échantillonnage et la forme discrétisée de la transformée de Mellin on peut alors expliciter l'algorithme de calcul de la fonction d'ambiguïté large bande.

### III. Calcul de la Fonction d'Ambiguïté Large Bande

#### III.1 Principe du calcul

En utilisant la propriété d'unitarité (7),  $X(a, b)$  devient:

$$X(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} M^{\xi}[Z](\beta) M^{\xi*}[UZ](\beta) d\beta \quad (18)$$

avec  $UZ$  la transformation définie par:

$$Z \longrightarrow UZ(f) = \sqrt{a} e^{-2i\pi abf} Z(af) \quad (19)$$

L'invariance d'échelle (8) de la transformée de Mellin permet d'écrire (18) comme:

$$X(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} M^{\xi}[Z](\beta) M^{\xi*}[Z_b](\beta) a^{2i\pi\beta} d\beta \quad (20)$$

$$\text{où } Z_b(f) = Z(f) e^{-2i\pi b f}$$

La formule (20) discrétisée prend la forme suivante:

$$X(a_1 q^p, b_k) = \sum_{i=0}^{2N-1} M^{\xi}[Z](i) M^{\xi*}[Z_{b_k}](i) e^{2i\pi\frac{ip}{2N}} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq p \leq 2N-1 \\ 0 &\leq k \leq N-1 \end{aligned}$$

$$\text{avec } a_1 = f_1/f_2$$

La fonction d'ambiguïté peut alors être calculée par une série de Transformées de Fourier Rapides. La complexité de l'algorithme de calcul, en nombre de TFR, est donnée par  $2M+1$  TFR de  $2N$  points si la fonction d'ambiguïté est discrétisée en  $(N, M)$  points sur les variables  $(a, b)$ . Cette complexité est tout à fait comparable à celle exigée pour le calcul de la fonction d'ambiguïté de Woodward.

### III.2 Algorithme de calcul

Le signal  $Z$  est caractérisé par sa largeur de bande  $B$  autour de la fréquence centrale  $f$  et sa durée  $T$  autour du temps  $\xi$ . D'après le théorème d'échantillonnage, pour calculer sans recouvrement la transformée de Mellin discrète, la raison d'échantillonnage géométrique  $q$  doit satisfaire à la relation (16) avec  $N$  donné par (17).

Etape 1: Echantillonnage de  $Z(f)$  sur son support  $[f_1, f_2]$  avec la raison  $q = (f_2/f_1)^{1/N}$  et calcul de  $M^{\xi}[Z](\beta)$  par transformée de Mellin discrète:

$$Z[j] = Z(f_1 q^j) \quad 0 \leq j \leq N-1 \quad (22)$$

$$\begin{cases} T[j] = \sqrt{f_1 q^j} Z[j] e^{2i\pi \xi q^j f_1} & 0 \leq j \leq N-1 \\ T[j] = 0 & N \leq j \leq 2N-1 \end{cases} \quad (23)$$

$$M[p] = \sum_{i=0}^{2N-1} T[i] e^{2i\pi \frac{1}{2N} p} \quad 0 \leq p \leq 2N-1 \quad (24)$$

Etape 2: Pour chaque retard  $b_k$   $0 \leq k \leq N-1$

- Echantillonnage de  $Z_b(f)$  sur le même support  $[f_1, f_2]$  avec la raison  $q = (f_2/f_1)^{1/N}$  et calcul de  $M^{\xi}[Z_b](\beta)$  par transformée de Mellin discrète:

$$Z_k[j] = T[j] e^{-2i\pi b_k f_1 q^j} \quad 0 \leq j \leq 2N-1 \quad (25)$$

$$M_k[p] = \sum_{i=0}^{2N-1} Z_k[i] e^{2i\pi \frac{1}{2N} p} \quad 0 \leq p \leq 2N-1 \quad (26)$$

- Transformée de Fourier sur  $\beta$  de  $M^{\xi}[Z](\beta) M^{\xi}[Z_b](\beta)$

$$X(a_1 q^p, b_k) = \sum_{i=0}^{2N-1} M[i] M_k^*[i] e^{2i\pi \frac{1}{2N} p} \quad 0 \leq p \leq 2N-1 \quad (27)$$

Cet algorithme est facile à mettre en oeuvre et a été testé de manière très satisfaisante sur les signaux les plus couramment rencontrés dans le domaine du radar: modulation linéaire de fréquence, saut de fréquence, signal hyperbolique, etc...

### IV. Résultats

La figure 2 met en évidence les différences flagrantes existant entre la fonction d'ambiguïté de Woodward et la fonction d'ambiguïté généralisée d'un signal large bande construit par sauts de fréquence discrète ( $BT=64$ ,  $B/f_0=1.4$ ). Le domaine de variation des paramètres retard-vitesse est le suivant:

Image a) Retard:  $[-T, T]$  Vitesse:  $[-0.7c, 0.7c]$   
Image b) Retard:  $[-T, 5.6T]$  Vitesse:  $[-0.7c, 0.7c]$

En radar, il est bien connu que les performances du filtre adapté qui consiste à corrélérer le signal écho avec des répliques du signal émis décalées en temps et en fréquence, se dégradent fortement (atténuation importante et élargissement du pic principal) dès lors qu'une des hypothèses de Woodward n'est plus respectée. Cette dégradation n'apparaît pas sur la figure 2a) car la quantité calculée n'est, en aucun cas, la sortie du filtre adapté. C'est une quantité qui n'existe que sous les hypothèses de Woodward. Aussi, il devient complètement faux de l'utiliser pour évaluer le pouvoir de résolution de codes radar sous des hypothèses contraires.

La figure 3 montre les évolutions de la fonction

d'ambiguïté généralisée d'un signal construit par sauts de fréquence pour différentes largeurs de bande relative. Plus le signal est à bande relative large, plus les domaines de variation des paramètres retard-compression deviennent importants.

Image a) Retard:  $[-T, 1.8T]$  Compression:  $[.5, 1.8]$   
Image b) Retard:  $[-T, 5.6T]$  Compression:  $[.1, 5.6]$

La figure 4 donne deux exemples de fonction d'ambiguïté. La première est calculée pour un signal à temps de propagation hyperbolique de largeur de bande relative de 1.4. La seconde est obtenue pour un signal bande étroite à temps de propagation de groupe linéaire (chirp), ce qui un résultat conforme avec ce qu'aurait donné une fonction d'ambiguïté de Woodward.

Image a) Retard:  $[-T, 5.6T]$  Compression:  $[.1, 5.6]$   
Image b) Retard:  $[-T, 1.01T]$  Compression:  $[.98, 1.01]$

### V. Conclusion

Un algorithme performant, rapide et facile à mettre en oeuvre permet donc de calculer les fonctions d'ambiguïté large bande de manière aussi aisée que celles de Woodward. Il est fondé sur la transformée de Mellin rapide et nécessite les échantillons géométriques en fréquence du signal. Un théorème d'échantillonnage permet de s'affranchir des problèmes de recouvrement.

Remerciements: L'auteur et l'ONERA remercient la Direction des Recherches et des Etudes Techniques (DRET) qui a financé cette étude.

### Références

- [1] A.W.Rihaczek, "Principles of High Resolution Radar", Mc Graw-Hill, New York, 1969
- [2] R.A.Ates, "Target Position Estimation in Radar and Sonar and Generalized Ambiguity Analysis for Maximum Likelihood Parameter Estimation", Proc. of the IEEE, Vol.67, No.6, June 1979
- [3] G.Jourdain, "Synthèse de Signaux Certains dont on connaît la Fonction d'Ambiguïté du type Woodward ou de type en Compression", Ann. Tel., Vol.32, No.1-2, 1977
- [4] J.Millet, G.Jourdain, "Signaux à Fort Pouvoir de Résolution Temps-Fréquence. Comparaison entre les Signaux de Costas et les Signaux à Modulation de Phase BPSK", Traitement du Signal, Vol.7, No.1, 1990
- [5] P.M.Woodward, "Probability and Information Theory With Applications to Radar", Pergamon Press, New-York, 1953
- [6] J.Bertrand P.Bertrand J.P.Ovarlez, "Compression d'Impulsions en Bande Large", Proc. XIIème Col. GRETSI, Juan les Pins, 1989
- [7] E.J.Kelly R.P.Wishner, "Matched Filter theory for High Velocity Accelerating Targets", IEEE Trans. on Military Elect., Mil 9, January 65
- [8] Zhen-Biao Lin, "Wideband Ambiguity Function of Broadband Signals", J. Acoust. Soc. Am., 83, (6), June 1988
- [9] J.Bertrand P.Bertrand J.P.Ovarlez, "Discrete Mellin Transform For Signal Analysis", Proc. IEEE-ICASSP, Albuquerque, New Mexico, 1990
- [10] J.Bertrand P.Bertrand J.P.Ovarlez, "Dimensionalized Wavelet Transform with Application to Radar Imaging", Proc. IEEE-ICASSP, Toronto, Canada, 1991
- [11] J.Bertrand P.Bertrand, "Affine Time-Frequency Distributions" in "Time-Frequency Signal Analysis" Editor B.Boashash, Longman Cheshire, 1991
- [12] J.P.Ovarlez, "Généralisation Large Bande de la Fonction d'Ambiguïté et des Représentations Temps-Fréquence. Calcul par Transformée de Mellin Discrète", Rapport Interne ONERA, 2/5169 SY, 1991 Thèse Université Paris VI, 1991
- [13] "Opération Signaux Test. Méthodes Temps fréquence. Fiches Synthétiques", Rapport CNRS-GDR 134 Traitement du signal et images, GT1, mars 1991

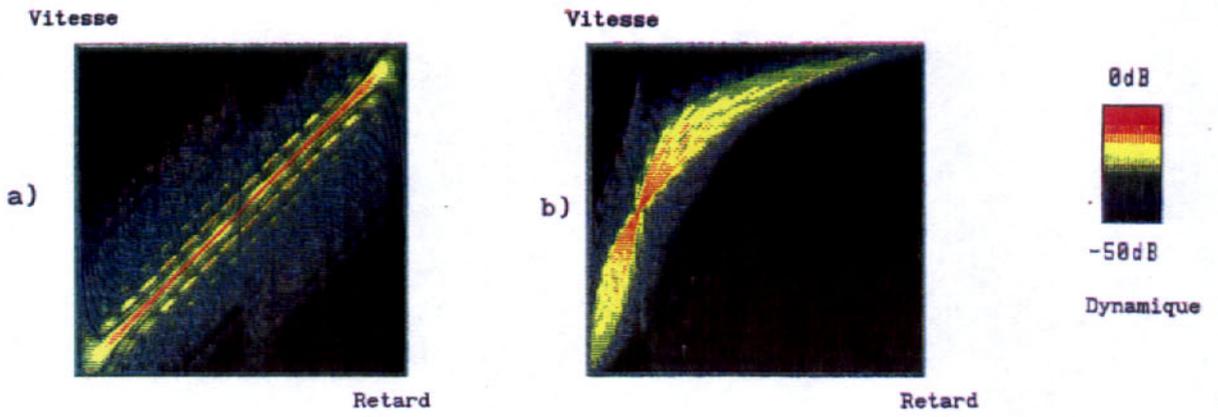


Fig.2: Comparaison entre fonction d'ambiguïté de Woodward (a) et fonction d'ambiguïté en compression (b) d'un code radar très large bande construit par sauts de fréquence ( $BT=64$ ,  $E/f_0=1.4$ ).

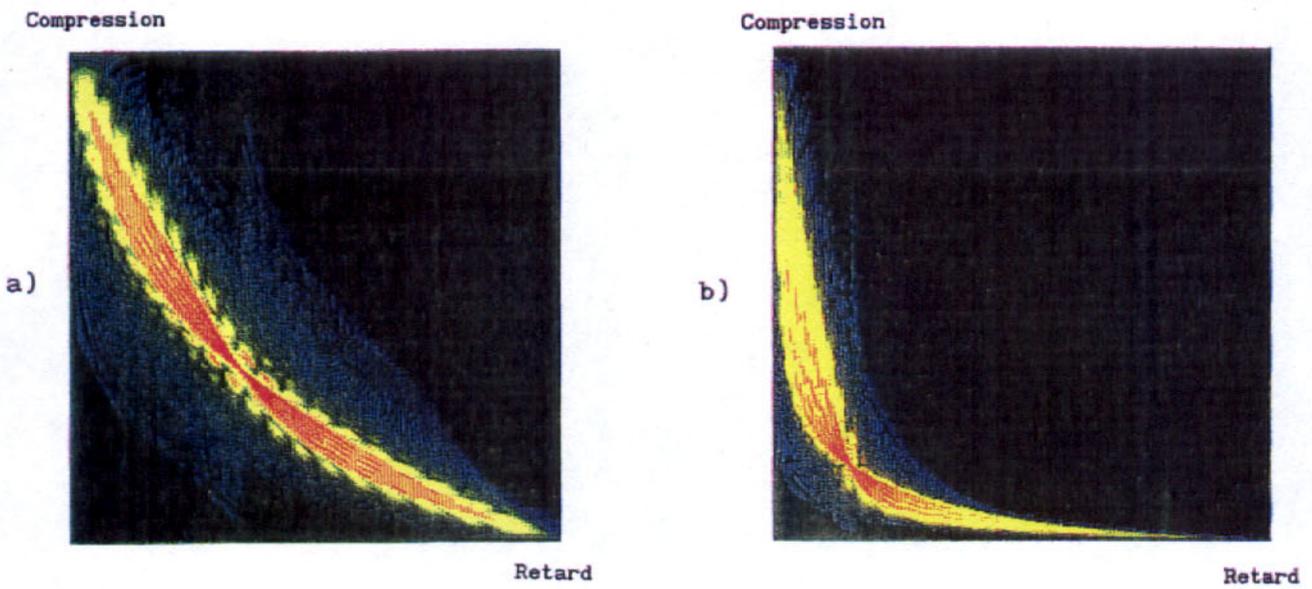


Fig.3: Fonctions d'ambiguïté large bande de codes radar construits par sauts de fréquence. a)  $BT=100$   $E/f_0=0.6$  b)  $BT=64$   $E/f_0=1.4$

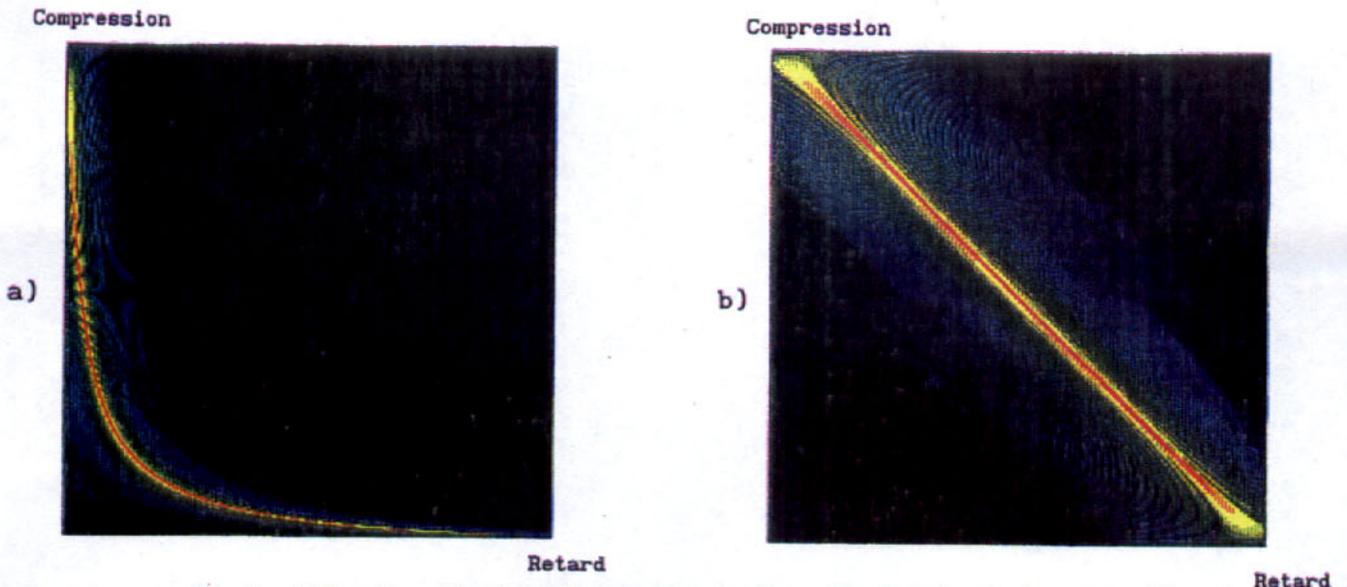


Fig.4: a) Fonction d'ambiguïté large bande d'un signal à temps de propagation de groupe hyperbolique  $BT=64$   $E/f_0=1.4$   
b) Fonction d'ambiguïté large bande d'un signal à temps de propagation de groupe linéaire  $BT=100$   $E/f_0=1/60$