

LA TRANSFORMATION DE MELLIN ET L'ANALYSE DES SIGNAUX LARGE BANDE *

Jean-Philippe Ovarlez

ONERA DES, BP72, 92322 Chatillon, France

RESUME

Un grand nombre de méthodes actuelles d'analyse de signaux n'ont de justification théorique acceptable que pour la catégorie bien particulière des signaux à bande étroite, associée au groupe des translations en temps et en fréquence. C'est le cas des Représentations Temps-Fréquence de la classe de COHEN [1] et des Fonctions d'Ambiguïté de WOODWARD, qui trouvent ainsi une limitation dans leurs conditions d'utilisation. Ces deux familles possèdent toutefois leur extension dans le domaine large bande : les Représentations Temps-Fréquence Affines de J. et P. BERTRAND et les Fonctions d'Ambiguïté Généralisées. Ces formes sont étroitement liées au mode de transformation du groupe affine qui agit sur les signaux par translation et compression de temps. Elles sont, de ce fait, beaucoup plus difficiles à utiliser et à calculer numériquement. La Transformation de MELLIN s'est alors, par sa puissance et sa simplicité d'emploi, révélée être un outil particulièrement adapté pour résoudre des problèmes théoriques et algorithmiques associés à ces effets de compression. On se propose donc dans cet article de découvrir cette nouvelle transformation qui possède de nombreuses analogies avec celle de FOURIER (interprétation physique de la variable de MELLIN, propriétés, forme discrétisée, théorème d'échantillonnage) et de faire la synthèse des applications développées à l'aide de cet outil.

I INTRODUCTION

I.1 Introduction

Le traitement du signal est actuellement une discipline en plein essor, aussi bien sur le plan théorique que sur celui des applications qu'il génère. Il dispose d'une immense panoplie d'outils qui permettent, en particulier, d'extraire d'un signal le maximum d'informations. Celles-ci peuvent être de diverses natures : le contenu spectral du signal, l'évolution temporelle de ce contenu spectral, l'estimation des paramètres qui le caractérisent... Mais, un grand nombre de ces méthodes d'analyse ne sont valables que pour une catégorie bien particulière de signaux : les signaux à bande étroite, c'est à dire ceux dont l'étendue spectrale est très faible devant la fréquence centrale.

Dans de nombreuses applications, les classes de signaux sont beaucoup plus générales et ne peuvent plus être considérées à bande étroite. On les rencontre, par exemple, lorsqu'on analyse les cris de chauve-souris ou de tout autre animal à sonar. En géophysique, des signaux impulsifs très large bande sont émis en vue de la détection ou de

ABSTRACT

Many signal analysis methods have a reasonable theoretical foundation only for the class of narrow-band signals, which is connected with the group of time and frequency translations. This is the case, for example, of the Time-Frequency Distributions of the COHEN's class [1], but also, of the WOODWARD Ambiguity Functions, which thus, found a limitation in their use conditions. These two typical examples have, however, an extension in the broad-band domain : the BERTRAND's Affine Time-Frequency Distributions and the Wide-Band Ambiguity Functions. These forms are related to the affine group transformations which act on the signals by time dilations and translations. This feature complicates their implementation and suggests the use of a MELLIN Transform in order to process dilations efficiently. This article is devoted to the presentation of this new transform which has many similarities with the FOURIER's one (physical interpretation of the MELLIN variable, properties, discrete transform, sampling theorem) and to the synthesis of the applications developed with this tool.

la classification de couches géologiques. Les systèmes de détection que sont les sonars ou les radars utilisent, pour accroître leurs performances, des codes d'émission dont les largeurs de bande relatives peuvent être élevées.

Les transformations physiques principales sous jacentes, auxquelles sont soumis ces signaux $z(t)$, sont les translations b et les contractions-dilatations a de temps (groupe affine $A(a, b)$) qui agissent selon :

$$\begin{array}{ccc} t & \longrightarrow & t' = at + b \\ \downarrow & & \downarrow \\ z(t) & \longrightarrow & z'(t) = a^r z(a^{-1}(t - b)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z(f) & \longrightarrow & Z'(f) = a^{r+1} e^{-2i\pi fb} Z(af) \end{array} \quad (1)$$

où r est un paramètre assez général ($r \in \mathbb{R}$), appelé paramètre de dimensionnement physique du signal.

Pour une première compréhension, citons le cas particulier du phénomène physique important qu'est l'effet Doppler. Il caractérise (dans le cas du radar, par exemple) le fait qu'un signal renvoyé par une cible en mouvement, est

* Journées Thématiques GdR CNRS "Traitement du Signal et Images", 8 et 9 Mars 1994, INSA Lyon

dilaté (ou contracté) et retardé par rapport au signal émis.

Cette contraction agissant sur le signal ne rend pas aisé le traitement mathématique ou numérique. La principale raison est qu'il n'existe pas, actuellement, d'outils appropriés permettant de traiter correctement cet effet. Pour s'en convaincre sur le plan numérique, il suffit de tenter de caractériser un signal dilaté à partir de la seule connaissance de ses échantillons réguliers dans le domaine temporel ou fréquentiel. Une solution simpliste, peu adaptée et alourdissant considérablement les algorithmes, consiste à interpoler ces échantillons. Sur le plan mathématique, la transformation de FOURIER est assez impuissante puisqu'elle n'est pas invariante aux dilatations. Un nouvel outil, la transformation de MELLIN, s'est avéré être une solution très satisfaisante pour résoudre ces problèmes. Elle est invariante, en module, par rapport aux dilatations, comme la transformation de FOURIER l'est pour les translations et possède de nombreuses propriétés intéressantes.

Ces problèmes de traitement disparaissent lorsqu'on se place dans le cas des signaux à bande étroite. Pour cette catégorie de signaux, le rôle du facteur de compression est toujours assimilé à un simple décalage en fréquence. C'est ainsi que l'on emploie souvent en théorie du radar, par abus de langage, la terminologie de "fréquence Doppler" qui correspond à la valeur approximée du décalage en fréquence. Cette quantité devient, de par sa nature fréquentielle, beaucoup plus facile à extraire par les méthodes usuelles comme l'analyse spectrale ou le filtrage.

Après avoir présenté cette nouvelle transformation au paragraphe 2, nous faisons une synthèse succincte des différentes applications développées grâce à cet outil : dans l'analyse temps-fréquence (Représentations affines et transformation en ondelettes) au paragraphe 3, dans l'analyse radar (ambiguïté, estimation, synthèse de codes radar, imagerie) au paragraphe 4.

II LA TRANSFORMATION DE MELLIN

II.1 Définition

La transformation de MELLIN [2] est définie sur le signal analytique $Z(f)$ en fréquence par la relation :

$$M^\xi[Z](\beta) = \int_0^{+\infty} Z(f) e^{2i\pi\xi f} f^{2i\pi\beta+r} df \quad (2)$$

ainsi que par sa forme réciproque :

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} M^\xi[Z](\beta) e^{-2i\pi\xi f} f^{-2i\pi\beta-r-1} d\beta \quad (3)$$

Cette transformation est unitaire, c'est à dire

$$(Z_1, Z_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} M^\xi[Z_1](\beta) M^{\xi*}[Z_2](\beta) d\beta \quad (4)$$

pour le produit scalaire invariant donné par :

$$(Z_1, Z_2) = \int_0^{+\infty} Z_1(f) Z_2^*(f) f^{2r+1} df \quad (5)$$

La transformation peut être interprétée comme le coefficient de la décomposition du signal $Z(f)$ sur une base de signaux hyperboliques $Z^\xi(f, \beta)$ définis par

$$Z^\xi(f, \beta) = e^{-2i\pi\xi f} f^{-2i\pi\beta-r-1} \quad (6)$$

dont la loi de retard de groupe est caractérisée par l'équation $t = \xi + \beta/f$.

Le paramètre réel r peut être choisi arbitrairement mais peut corriger le changement de dimension d'une quantité physique effectué lors d'une transformation affine sur le temps. On choisira par simplification, le paramètre temporel ξ égal à zéro, ce qui ne revient à considérer que le cas particulier des signaux centrés autour de l'époque moyenne nulle. On notera alors par la suite $M[Z] = M^{\xi=0}[Z]$.

La principale propriété de la transformation de MELLIN est la propriété d'invariance aux changements d'échelle :

$$\begin{array}{ccc} Z(f) & \xrightarrow{U_\xi} & U_\xi Z(f) = a^{r+1} e^{-2i\pi\xi(1-a)f} Z(af) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^\xi[Z](\beta) & \longrightarrow & M^\xi[U_\xi Z](\beta) = a^{-2i\pi\beta} M^\xi[Z](\beta) \end{array} \quad (7)$$

Cette propriété et la propriété d'unitarité (4) permettront par la suite de réécrire dans l'espace de MELLIN les différentes formes large bande de manière plus intéressante. Une autre propriété de la transformation de MELLIN, très importante, est la diagonalisation de l'opérateur B défini comme :

$$BZ(f) = -\frac{1}{2i\pi} \left(f \frac{d}{df} + r + 1 + 2i\pi\xi f \right) Z(f) \quad (8)$$

qui se transforme par transformée de MELLIN comme $M^\xi[BZ](\beta) = \beta M^\xi[Z](\beta)$.

Citons enfin la transformation de MELLIN d'un produit invariant défini par :

$$(Z_1 \circ Z_2)(f) = f^{r+1} e^{2i\pi\xi f} Z_1(f) Z_2(f) \quad (9)$$

qui n'est que le produit de convolution des transformées :

$$M^\xi[Z_1 \circ Z_2](\beta) = (M^\xi[Z_1] * M^\xi[Z_2])(\beta) \quad (10)$$

et le produit de convolution multiplicatif :

$$(Z_1 ** Z_2)(f) = \int_0^\infty Z_1\left(\frac{f}{f'}\right) Z_2(f') e^{2i\pi\xi\left(\frac{f}{f'}+f'-f\right)} \frac{df'}{f'} \quad (11)$$

qui se transforme en produit des deux transformées :

$$M^\xi[Z_1 ** Z_2](\beta) = M^\xi[Z_1](\beta) M^\xi[Z_2](\beta) \quad (12)$$

II.2 La transformation de MELLIN discrète

Toutes les propriétés importantes qui ont permis de construire la transformation discrète et de donner une interprétation de la variable β (paramètre d'hyperbole $t = \xi + \beta/f$ dans le plan temps-fréquence) peuvent être consultées dans [2, 3]. Cette transformée s'écrit :

$$M^\xi[Z]\left(\frac{p}{N \ln q}\right) = \ln q \sum_{k=L}^{L+N-1} q^{k(r+1)} e^{2i\pi\xi q^k} Z(q^k) e^{2i\pi\frac{kp}{N}} \quad (13)$$

où $0 \leq p \leq N-1$ et L vérifie $q^L = f_1$ avec f_1 fréquence min de Z .

La transformée de MELLIN est ainsi calculée sur les échantillons géométriques du signal fréquentiel par algorithme rapide (Transformée de FOURIER Rapide). La raison géométrique q d'échantillonnage du signal Z doit vérifier une condition de non recouvrement :

$$\frac{1}{\ln q} \geq \beta_2 - \beta_1 \quad (14)$$

où $[\beta_1, \beta_2]$ est le support de $M^\xi[Z](\beta)$. Ce support peut à première vue ne pas être facile à déterminer. En fait, l'étude des distributions temps-fréquence affines et en particulier la construction tomographique de la distribution affine unitaire de J. et P. Bertrand [4], notée $P_0(t, f)$ et d'expression

$$P_0(t, f) = f \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda(u)\lambda(-u))^{r+1} Z(f\lambda(u)) Z^*(\lambda(-u)) e^{-2i\pi f t u} du \quad (15)$$

avec

$$\lambda(u) = \frac{ue^{-u/2}}{2 \sinh u/2} \quad (16)$$

va pouvoir apporter, de manière très élégante, une solution très simple à ce problème et conduire ainsi à l'élaboration du théorème d'échantillonnage de la transformation de MELLIN.

II.3 Théorème d'échantillonnage

Grâce à l'étude générale des représentations temps-fréquence affines des signaux [4] et à la formule de Moyal, la transformation de MELLIN est reliée à la distribution temps-fréquence affine unitaire $P_0(t, f)$ par l'équation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} P_0(t, f) \delta(t - \xi - \beta/f) f^{2r} df = |M^\xi[Z](\beta)|^2 \quad (17)$$

Le carré du module de la transformée de MELLIN du signal Z est égal à l'intégrale de sa représentation temps-fréquence affine $P_0(t, f)$ sur un réseau d'hyperboles indexées par β dans le plan temps-fréquence (transformation de Radon généralisée). Ainsi, lorsque le signal est localisé en temps et en fréquence, il existe un certain paramètre β_0 à partir duquel l'intégrale de $P_0(t, f)$ devient nulle. La transformée de MELLIN d'un signal localisé en temps et en fréquence est donc elle-même localisée.

Si le signal est localisé dans le plan temps-fréquence (largeur de bande B autour de la fréquence centrale f_0 , durée T), il est possible de déterminer grossièrement ce paramètre β_0 par

$$\beta_0 = (f_0 + B/2)T/2 \quad (18)$$

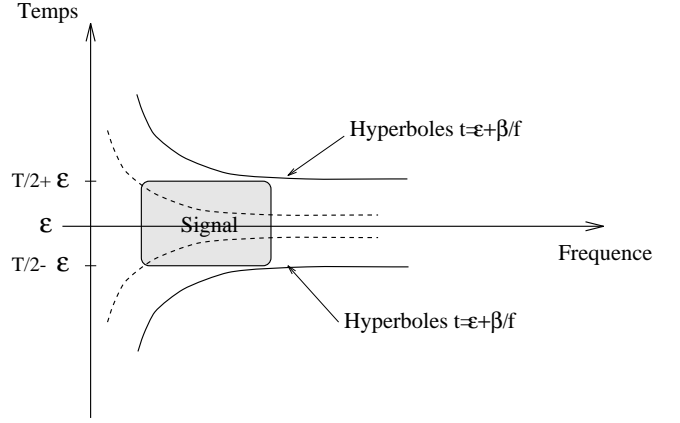


FIG. 1 – Localisation d'un signal entre les hyperboles d'équation $t = \xi + \beta_0/f$ et $t = \xi - \beta_0/f$

en ne considérant que les hyperboles qui délimitent au mieux ce signal dans le plan temps-fréquence, comme le montre la figure 1.

La condition de non recouvrement (14) s'écrit alors :

$$\frac{1}{\ln q} \geq \beta_2 - \beta_1 = 2\beta_0 \quad (19)$$

avec β_0 défini par la relation (18). Il vient :

$$\frac{1}{\ln q} \geq BT(1 + 2/R)/2 \quad (20)$$

avec BT définissant le produit bande durée du signal et R la largeur de bande relative B/f_0 .

Si le support fréquentiel de Z est $[f_1, f_2]$, la raison q doit être choisie de manière à ce que la restriction de la forme dilatocyclée \bar{Z} de Z (périodisation de Z à toutes les échelles sur le demi-axe des fréquences positives) sur $[f_1, f_2]$

$$\bar{Z}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q^{n(r+1)} Z(Q^n f) e^{2i\pi\xi f(1-Q^n)} \quad (21)$$

soit égale à Z , ce qui implique :

$$Q = q^N \geq \frac{f_2}{f_1} \quad (22)$$

Le nombre de points N qui caractérisent parfaitement $M^\xi[Z]$ est déduit de (20) et (22) :

$$N \geq BT \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{R} \right) \ln \frac{1 + R/2}{1 - R/2} \quad (23)$$

Si le signal est à bande étroite, on peut remarquer que toutes les dilatations deviennent des translations, que la transformée de MELLIN devient transformée de FOURIER, et que le nombre de points N devient le BT du critère de NYQUIST.

III LA TRANSFORMATION DE MELLIN ET L'ANALYSE TEMPS-FREQUENCE

III.1 Les distributions temps-fréquence affines

La classe des distributions affines de WIGNER a été introduites par J. et P. BERTRAND dans [5] comme étant la classe la plus générale satisfaisant à des contraintes de covariance par certains groupes à 3 paramètres contenant le groupe affine. Cette classe, indicée par un réel k , est définie comme :

$$P_k(t, f) = |f|^{2r+2-q} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_k(u) Z(f\lambda_k(u)) Z^*(\lambda_k(-u))}{e^{-2i\pi ft(\lambda_k(-u)-\lambda_k(u))}} du \quad (24)$$

où Z est la transformée de FOURIER d'un signal réel, r et q des paramètres physiques de dimensionnement, λ_k une fonction vérifiant :

$$\lambda_k(u) = \left[k \frac{e^{-u} - 1}{e^{-ku} - 1} \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (25)$$

et où μ_k est une fonction réelle arbitraire positive et paire mais cependant bien déterminée par les différentes contraintes imposées à la distribution (localisation, unitarité, etc...). Les formes P_k conduisant aux propriétés de localisation sont indicées pour $k \leq 0$. La distribution affine restreinte aux signaux à fréquence positive qui satisfait à la fois aux propriétés de localisation et à la propriété d'unitarité est obtenue pour $k = 0$ et a pour forme :

$$P_0(t, f) = f^{2r+2-q} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda(u)\lambda(-u))^{r+1} Z(f\lambda(u)) Z^*(\lambda(-u))}{e^{-2i\pi ftu}} du \quad (26)$$

où la fonction λ , définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^{+*} , vérifie :

$$\lambda(u) = \frac{ue^{\frac{u}{2}}}{2 \sinh\left(\frac{u}{2}\right)} \quad (27)$$

On remarque que ces formes sont très lourdes à mettre en œuvre. Leur calcul numérique par des méthodes classiques et à partir d'une série d'échantillons du signal nécessite l'interpolation des échantillons avant intégration. Toutes ces opérations sont très gourmandes en temps de calcul. La transformation de MELLIN permet alors de rendre plus souple et plus rapide le calcul numérique des formes (24) pour $k \leq 0$ [6]. Le principe de calcul étant le même, nous nous intéresserons ici qu'au calcul de $P_0(t, f)$. Posons :

$$\gamma = ft \quad \text{et} \quad \tilde{P}_0(\gamma, f) = P_0(t, f) \quad (28)$$

La forme (26) peut alors s'écrire :

$$f^{-r-1+q} \tilde{P}_0(\gamma, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda(u)\lambda(-u))^{r+1} e^{2i\pi\gamma u} du \int_{-\infty}^{+\infty} Z(f\lambda(u)) Z^*(f\lambda(-u)) \quad (29)$$

On reconnaît dans la seconde ligne de (29) le produit invariant (9) de Z au point $f\lambda(u)$ et de Z^* au point $f\lambda(-u)$ pour $\xi = 0$. Dans toute la suite, on supposera que le signal est centré autour de l'époque moyenne $\xi = 0$. D'après une des propriétés de la transformation, la transformation de MELLIN d'un produit invariant est le produit de convolution des transformées de MELLIN. Écrivons ces deux transformées. D'après la propriété d'invariance d'échelle, celles-ci sont données par :

$$M[Z(f\lambda(u))](\beta) = \lambda(u)^{-2i\pi\beta-r-1} M[Z](\beta) \quad (30)$$

et :

$$M[Z^*(f\lambda(-u))](\beta) = \lambda(-u)^{-2i\pi\beta-r-1} M^*[Z](-\beta) \quad (31)$$

On peut maintenant expliciter la convolution des quantités (30) et (31) qui est égale à la transformée de MELLIN du produit invariant apparaissant dans (29). Pour cela, posons :

$$X(\beta, u) = \lambda(u)^{-2i\pi\beta} M[Z](\beta) \quad (32)$$

Le produit de convolution des quantités (30) et (31) s'exprime en fonction de (32) et aboutit à la relation importante suivante :

$$(\lambda(u)\lambda(-u))^{-r-1} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta_1, u) X^*(\beta_1 - \beta, -u) d\beta_1 \quad (33)$$

On obtient ainsi l'expression de la transformée de MELLIN de la représentation temps-fréquence affine $P(t, f)$:

$$M[\tilde{P}_0(\gamma, f)](\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\gamma u} du \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta_1, u) X^*(\beta_1 - \beta, -u) d\beta_1 \right] \quad (34)$$

Pour calculer cette expression, il suffit de d'effectuer le produit de corrélation entre crochets par transformées de FOURIER et de prendre la transformée de FOURIER inverse sur u . Il est nécessaire de calculer ensuite la transformée de MELLIN inverse pour obtenir $P_0(t, f)$. En posant :

$$F(\theta, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta, u) e^{2i\pi\theta\beta} d\beta \quad (35)$$

la transformée de FOURIER de $X(\beta, u)$ par rapport à la variable β , on peut alors écrire (34) comme :

$$M[\tilde{P}_0(\gamma, f)](\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, u) F^*(\theta, -u) e^{2i\pi\theta\beta} d\beta e^{2i\pi\gamma u} du \quad (36)$$

En prenant la transformée de MELLIN inverse des deux membres de cette expression et en effectuant l'intégration sur la variable β , on a :

$$\tilde{P}_0(\gamma, f) = 2Re f^{-q} \int_0^{+\infty} F(\ln f, u) F^*(\ln f, -u) e^{2i\pi\gamma u} du \quad (37)$$

où Re désigne la prise de la partie réelle. Toutes ces opérations peuvent être facilement effectuées de manière numérique grâce à la transformation de FOURIER discrète.

Pour une image de (M, N) points, la complexité est (en nombre de TFR) : $2M + 1$ TFR de $2N$ points + N TFR de M points.

III.2 Les transformations en ondelettes

De manière générale, la transformée en ondelette d'un signal est donnée par :

$$C(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \phi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (38)$$

$$= \sqrt{a} \int_0^{+\infty} Z(f) \Phi^*(af) e^{2i\pi fb} df \quad (39)$$

où ϕ et Φ représentent respectivement l'ondelette analysante et sa transformée de FOURIER.

En posant $Z_b(f) = Z(f) e^{2i\pi bf}$, l'invariance d'échelle (7) de la transformée de MELLIN permet d'écrire (39) comme :

$$C(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} M[Z](\beta) M^*[Z_b](\beta) a^{2i\pi\beta} d\beta \quad (40)$$

Le facteur de compression a n'intervient plus dans le calcul des transformations de MELLIN. Pour un facteur de translation temporelle donné b de l'ondelette, il suffit d'effectuer la transformée de FOURIER inverse sur β du produit des deux transformées de MELLIN pour obtenir les échantillons a . Les coefficients d'ondelette peuvent alors être calculés par une série de Transformées de FOURIER Rapides. La complexité de l'algorithme de calcul, en nombre de TFR, est donnée par $2M + 1$ TFR de $2N$ points si les coefficients d'ondelette sont discrétisés en (N, M) points sur les variables (a, b) .

IV LA TRANSFORMATION DE MELLIN ET L'ANALYSE RADAR

IV.1 Introduction

Considérons l'émission d'un signal $z(t)$ (analytique) sur une cible en mouvement. Le signal reçu par le radar peut être modélisé comme :

$$x(t, \underline{\alpha}_0) = A_0 T_{\underline{\theta}_0} z(t) e^{i\phi_0} + b(t) \quad (41)$$

où $\underline{\alpha}_0 = (A_0, \phi_0, \underline{\theta}_0)$ et où $T_{\underline{\theta}_0}$ est une sous transformation agissant sur le signal $z(t)$ avec un jeu de paramètres inconnus $\underline{\theta}_0$ (retard, décalage de fréquence ou compression Doppler). Le paramètre A_0 caractérise l'amplitude du signal écho, ϕ_0 un changement de phase et $b(t)$ un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 . Lorsque les densités de probabilité des paramètres A_0 et ϕ_0 sont inconnues, ce qui est souvent le cas, la statistique Λ à maximiser, d'après la théorie de l'estimation au sens du Maximum de Vraisemblance, est donnée par le carré du module du produit scalaire entre le signal reçu $x(t, \underline{\alpha}_0)$ et une certaine réplique $T_{\underline{\theta}} z(t)$ du signal émis adaptée à un jeu de paramètres particuliers $\underline{\theta}$. On peut montrer que la théorie du filtre optimal, qui consiste à déterminer le filtre qui maximise le rapport signal à bruit, conduit de même, en présence de bruit blanc, au calcul de cette même quantité, appelée sortie du filtre adapté.

$$\Lambda(\underline{\alpha}_0, \underline{\theta}) = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t, \underline{\alpha}_0) T_{\underline{\theta}}^* z(t) dt \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |T_{\underline{\theta}} z(t)|^2 dt} \quad (42)$$

Lorsque le rapport signal à bruit est élevé ou qu'il n'y a pas de bruit additif, ce produit scalaire, plus connu sous le nom de fonction d'ambiguïté du signal, est maximal pour un jeu de paramètres $\underline{\theta}$ égal à celui de la cible $\underline{\theta}_0$. Il suffit alors de déterminer le maximum de cette fonction pour accéder directement aux paramètres cherchés.

Il est clair que la qualité de ce genre d'estimation n'est pas parfaite et il convient alors de pouvoir quantifier l'erreur d'estimation commise sur les paramètres. La qualité d'un estimateur $\hat{\theta}_i$ est généralement mesurée par sa variance $Var(\theta_i - \hat{\theta}_i)$. Pour un estimateur non biaisé ($E(\hat{\theta}_i) = \theta_i$), cette variance possède une borne minimale donnée par les bornes de CRAMER-RAO [7]. Les bornes de CRAMER-RAO sont explicitées en inversant une matrice dite *Matrice d'Information de FISHER* définie par :

$$J_{i,j} = \left(-E \left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \right)_{i,j} \quad (43)$$

où θ_i représente chaque composantes du vecteur $\underline{\theta}$.

IV.2 La Fonction d'Ambiguïté

La fonction d'ambiguïté est donc une fonction de discrimination entre un signal et sa transformée par un opérateur $T_{\underline{\theta}}$ de paramètres inconnus $\underline{\theta}$ (translation de temps, de fréquence, compression, etc...).

IV.2.1. La fonction d'ambiguïté bande étroite

La fonction d'ambiguïté bande étroite, telle qu'on la rencontre en théorie du radar ou du sonar, est construite sur le signal analytique $z(t)$ ou sur sa transformée de FOURIER $Z(f)$. Supposons qu'une cible située à une distance R_0 et animée d'une vitesse radiale v_0 soit illuminée par un signal $z(t)$ caractérisé par une largeur de bande B , une fréquence porteuse f_0 et une durée T . Sous les hypothèses simplificatrices de WOODWARD [8] énoncées ci-dessous,

- vitesse relative des cibles v_0 négligeable devant la célérité c dans le milieu de propagation
- signal bande étroite $B \ll f_0$
- $BT \ll \frac{c}{2v_0}$

l'effet Doppler peut être approximé par un simple décalage de fréquence sur le signal $z(t)$. Ainsi, le signal écho $x(t, \underline{\alpha}_0)$ peut être mis sous la forme :

$$x(t, \underline{\alpha}_0) = A_0 z(t - \tau) e^{2i\pi\nu t} e^{i\phi_0} + b(t) \quad (44)$$

où $\nu = 2v_0 f_0 / c$ est le décalage Doppler et τ le retard de propagation (position radiale $R_0 = c\tau/2$) et la fonction d'ambiguïté prend alors la forme suivante :

$$X(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) z^*(t - \tau) e^{-2i\pi\nu t} dt \quad (45)$$

où $\nu = 2(v - v_0) f_0 / c$ est la différence entre la fréquence Doppler du signal reçu et la fréquence Doppler du signal réplique et $\tau = 2(R - R_0) / c$ est la différence des retards entre le signal reçu et la réplique.

La Matrice d'Information de FISHER (43) est aisément calculable et conduit à

$$J = \frac{4\pi^2 A_0^2}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \sigma_f^2 & f_0 t_0 - m \\ f_0 t_0 - m & \sigma_t^2 \end{pmatrix} \quad (46)$$

où les moments du premier ordre f_0 et t_0 représentent la fréquence centrale et l'époque moyenne et où ceux du second ordre, σ_f et σ_t , représentent la largeur de bande et la durée du signal.

$$f_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f |Z(f)|^2 df \quad \sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_0)^2 |Z(f)|^2 df \quad (47)$$

$$t_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} t |z(t)|^2 dt \quad \sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0)^2 |z(t)|^2 dt \quad (48)$$

Le paramètre noté m définit l'indice de modulation du signal

$$m = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} t z(t) \frac{dz^*}{dt} dt \quad (49)$$

Chaque valeur des bornes minimales de la variance des estimateurs est obtenue en inversant la matrice (46), ce qui conduit à :

$$E[(\nu - \hat{\nu})^2] = \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{\sigma_f^2}{\sigma_t^2 \sigma_f^2 - (m - f_0 t_0)^2} \geq \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{1}{\sigma_t^2} \quad (50)$$

$$E[(\tau - \hat{\tau})^2] = \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2 \sigma_f^2 - (m - f_0 t_0)^2} \geq \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{1}{\sigma_f^2} \quad (51)$$

Ces résultats bien connus prouvent qu'en théorie du radar, les signaux optimaux sont donnés par des codes qui réalisent à la fois un bon comportement en résolution radiale (grande largeur de bande σ_f) ainsi qu'en vitesse (grande durée σ_t). Ce sont les signaux à grand produit bande durée BT [9].

IV.2.2 La fonction d'ambiguïté large bande

Lorsque l'une des hypothèses de WOODWARD n'est pas respectée, il est nécessaire de considérer la fonction d'ambiguïté dite large bande [10, 11] ou encore généralisée, sous peine de dégrader les performances du système (forte atténuation du maximum de la sortie de filtre adapté, dégradation de la largeur des pics principaux, etc...). Dans ce cas, le signal écho $x(t)$ peut alors se mettre sous la forme :

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{a_0}} z(a_0^{-1}t - b_0) e^{i\phi_0} + b(t) \quad (52)$$

Les deux formes équivalentes de la fonction d'ambiguïté large bande sont alors données par :

$$X(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) z^*\left(\frac{t}{a} - b\right) dt \quad (53)$$

$$= \sqrt{a} \int_0^{+\infty} Z(f) Z^*(af) e^{2i\pi abf} df \quad (54)$$

où $a = (c - v_0)/(c + v_0)$ est le facteur de compression Doppler et $b = 2R_0/(c - v_0)$ est le retard.

La transformation de MELLIN permet de calculer exactement cette quantité. En utilisant la propriété d'unitarité de la transformation de MELLIN (4) avec $r = -1/2$, la fonction d'ambiguïté large bande (54) $X(a, b)$ devient :

$$X(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} M[Z](\beta) M^*[U_0 Z](\beta) d\beta \quad (55)$$

avec $U_0 Z$ la transformation définie par

$$Z \longrightarrow U_0 Z(f) = \sqrt{a} e^{-2i\pi abf} Z(af) \quad (56)$$

En posant $Z_b(f) = Z(f) e^{-2i\pi bf}$, l'invariance d'échelle (7) de la transformée de MELLIN permet d'écrire (55) comme :

$$X(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} M[Z](\beta) M^*[Z_b](\beta) a^{2i\pi\beta} d\beta \quad (57)$$

Le facteur de compression a n'intervient plus dans le calcul des transformations de MELLIN. Pour un facteur de translation temporelle donné b , il suffit d'effectuer la transformée de FOURIER inverse sur β du produit des deux transformées de MELLIN pour obtenir les échantillons a . La fonction d'ambiguïté peut alors être calculée par une série de Transformées de FOURIER Rapides. La complexité de l'algorithme de calcul, en nombre de TFR, est donnée par $2M + 1$ TFR de $2N$ points si la fonction d'ambiguïté est discrétisée en (N, M) points sur les variables (a, b) . Cette complexité est tout à fait comparable à celle exigée pour le calcul de la fonction d'ambiguïté de WOODWARD.

Dans le cas large bande, estimer la vitesse ne consiste pas en un simple problème d'estimation de décalage de fréquence Doppler mais en un problème d'estimation d'un facteur de compression. La statistique à maximiser est donnée par le carré du module de la fonction d'inter-ambiguïté large bande (réécrite dans le domaine fréquentiel) :

$$\Lambda = \frac{a}{2\sigma^2} \left| \int_0^{+\infty} X(f) Z^*(af) e^{2i\pi abf} df \right|^2 \quad (58)$$

où les paramètres $a = (c + v)/(c - v)$ et b représentent les paramètres facteur de compression Doppler et retard à estimer. Un calcul direct de la matrice de FISHER par des méthodes classiques n'est, premièrement, pas facile à effectuer et, deuxièmement, ne conduit à aucune interprétation physique de ses coefficients, comme dans le cas bande étroite (46). En utilisant la Transformation de MELLIN, le calcul des coefficients de la matrice de FISHER est, d'une part, très facilité et conduit, d'autre part, à une interprétation physique de chacun de ses coefficients [3, 12].

De la même manière que pour l'équation (57), l'équation (58) se réécrit :

$$\Lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} M[X](\beta) M^*[Z_b](\beta) a^{2i\pi\beta} d\beta \right|^2 \quad (59)$$

On peut alors montrer que la Matrice d'Information de FISHER prend la forme :

$$J = \frac{4\pi^2 A_0^2}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \sigma_\beta^2 & f_0 \beta_0 - M \\ f_0 \beta_0 - M & \sigma_f^2 \end{pmatrix} \quad (60)$$

où les paramètres σ_f et f_0 définissent respectivement largeur de bande et fréquence centrale du signal et où les paramètres β_0 , σ_β sont donnés par :

$$\beta_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta |M[Z](\beta)|^2 d\beta \quad \sigma_\beta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\beta - \beta_0)^2 |M[Z](\beta)|^2 d\beta \quad (61)$$

Les moments du premier et du second ordre sur le carré du module de la transformée de MELLIN peuvent être interprétés respectivement comme le β moyen et l'étendue du signal Z dans l'espace de MELLIN. L'indice de modulation large bande noté M et défini par :

$$M = -\frac{1}{2\pi} \text{Im} \int_0^{+\infty} f^2 \frac{dZ}{df} Z^*(f) df \quad (62)$$

joue ici le même rôle pour les signaux hyperboliques que l'indice de modulation bande étroite m pour les signaux 'chirps' (signaux à modulation linéaire de fréquence). Enfin, la quantité A_0/σ est le rapport signal à bruit.

Afin d'estimer la qualité des paramètres retard et compression, la Matrice d'Information de FISHER doit être inversée. Chaque terme de la matrice inverse J^{-1} donne la valeur minimale de la variance de chaque estimateur. Comme les estimateurs sont non biaisés et efficaces (fort rapport signal à bruit, nombre de mesures important), les bornes de CRAMER-RAO sont atteintes et on obtient les résultats importants suivants :

- La variance de l'estimateur retard \hat{b} est donnée par :

$$E[(b - \hat{b})^2] = \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_f^2 \sigma_\beta^2 - (M - \beta_0 f_0)^2} \geq \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{1}{\sigma_f^2} \quad (63)$$

Ce premier résultat (63) montre que la résolution retard (ou distance) est, comme dans le cas bande étroite, proportionnelle à l'inverse de la largeur de bande du signal.

- La variance de l'estimateur facteur de compression \hat{a} est donnée par :

$$E[(a - \hat{a})^2] = \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2 \sigma_\beta^2 - (M - \beta_0 f_0)^2} \geq \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{1}{\sigma_\beta^2} \quad (64)$$

- La variance de l'estimateur vitesse \hat{v} est donnée par :

$$E[(v - \hat{v})^2] = \frac{c^2}{4} E[(a - \hat{a})^2] \quad (65)$$

Les deux résultats (64) et (65) sont très importants car ils montrent que la résolution Doppler dépend maintenant, non plus seulement de la durée du signal comme dans le cas bande étroite, mais de l'étendue du signal dans l'espace de MELLIN.

A titre d'exemple, si l'on considère un signal hyperbolique, c'est à dire à temps de propagation de groupe hyperbolique :

$$Z(f) = f^{2i\pi\beta_0 - \frac{1}{2}} \quad (66)$$

il est clair que son étendue temporelle σ_t n'est pas nulle. De ce fait, la variance bande étroite (50) de l'estimateur de

vitesse qui est donnée, à un coefficient près, par l'inverse de son étendue temporelle, peut être considérée comme non-infinie, ce qui donne au signal un 'faux' certain pouvoir de résolution vitesse. Calculons maintenant la variance large bande (64) en vitesse de ce signal : $\sigma_\beta = 0$ ce qui implique une variance infinie (pas de résolution en vitesse). Le signal hyperbolique est donc un signal qui ne résout aucunement en vitesse.

- La covariance des estimateurs croisés compression-retard est donnée par :

$$E[(a - \hat{a})(b - \hat{b})] = \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{M - \beta_0 f_0}{\sigma_f^2 \sigma_\beta^2 - (M - \beta_0 f_0)^2} \quad (67)$$

Sous les hypothèses de WOODWARD, les hyperboles qui délimitent le signal dans le demi plan temps-fréquence peuvent être assimilées à des droites parallèles à l'axe des fréquences. De ce fait, les grandeurs β , β_0 , σ_β , M et $a = (c+v)/(c-v)$ peuvent être respectivement approximées par $f_0 t$, $f_0 t_0$, $f_0 \sigma_t$, $f_0 m$ et $1 + 2v/c$. En substituant ces approximations dans (64) et (65), on retrouve les résultats classiques du cas bande étroite :

$$E[(v - \hat{v})^2] = \frac{c^2 \sigma^2}{16\pi^2 A_0^2 f_0^2} \frac{\sigma_f^2}{\sigma_t^2 \sigma_f^2 - (m - f_0 t_0)^2} \quad (68)$$

IV.3 Construction d'un signal large bande

Considérons un signal monochromatique donné par l'équation $Z(f) = \delta(f - f_0)$. Ce signal possède une transformée de MELLIN générale donnée par :

$$M^\xi[Z](\beta) = f_0^{2i\pi\beta + r} \exp(2i\pi\xi f_0) \quad (69)$$

On peut maintenant déterminer la fréquence du signal $Z(f)$ comme fonction de la variable de MELLIN définie par :

$$f_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{d\beta}\right) \quad (70)$$

où $\phi(\beta)$ est la phase de la transformée de MELLIN de Z . En généralisant cette expression à tous les signaux, nous obtenons une expression valable qui régit la loi de fréquence en fonction de la variable β de MELLIN :

$$f(\beta) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(\beta)}{d\beta}\right) \quad (71)$$

Notons que cette démarche est totalement calquée sur la détermination du temps de propagation de groupe (temps en fonction de la fréquence) ou de la loi de fréquence instantanée (fréquence en fonction du temps). Ainsi, étant donnée une loi de fréquence, nous pouvons calculer la phase de la transformée de MELLIN et ainsi synthétiser un signal dont la transformée de MELLIN est donnée par $M^\xi[Z](\beta) = \exp(i\phi(\beta))$. Cette procédure est l'analogue de celle utilisée en bande étroite pour la construction de signaux synthétiques à partir de leur loi de fréquence instantanée. Comme

elle, elle assure seulement le fait que le signal synthétisé possède à la fois une étendue fixée dans l'espace des fréquences et de MELLIN mais ne garantit en aucun cas le bon comportement de ses fonctions d'autocorrélation retard

et compression (lobes secondaires très bas) données respectivement par :

$$C_1(\tau) = \int_0^{+\infty} |Z(f)|^2 e^{2i\pi f\tau} df \quad (72)$$

$$C_2(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} |M^\xi[Z](\beta)|^2 a^{2i\pi\beta} d\beta \quad (73)$$

Une voie intéressante pour ce faire est d'étendre sur (2) la méthode bande étroite de la phase stationnaire proposée dans [13] permettant de synthétiser un signal dont les fonctions d'autocorrélations retard et vitesse (fréquence Doppler) sont données.

IV.3 L'imagerie radar par transformations en ondelettes

L'imagerie radar est un outil qui permet de construire une image à une, deux ou trois dimensions, des points brillants d'une cible, c'est à dire des points qui réfléchissent l'énergie, lorsqu'elle a été éclairée par un signal radar. Les méthodes d'imagerie classique, basée sur les méthodes du type Fourier, utilisent l'hypothèse simplificatrice de points brillants blancs et isotropes. Selon celle-ci, ces derniers sont supposés renvoyer l'énergie de la même manière pour toutes les fréquences et toutes les directions d'illumination. La méthode d'imagerie construite à l'ONERA [14, 15] permet de construire une image radar pour chaque fréquence et chaque direction d'illumination-observation. Elle permet alors de suivre, contrairement aux méthodes du type FOURIER, le comportement spatial des points brillants en fonction des paramètres d'éclairage (fréquence, direction). La méthode utilisée est basée sur la transformation en ondelette multidimensionnelle du coefficient de réflexion de la cible et l'algorithme rapide décrit dans cet article se prête parfaitement bien aux expérimentations puisqu'il est possible d'échantillonner géométriquement le coefficient de réflexion sur la bande d'analyse, ce qui évite un sur-échantillonnage des données.

V CONCLUSION

La transformation de MELLIN est un outil très puissant qui peut permettre, tant du point de vue analytique que sur le plan algorithmique, de calculer des formes large bande, c'est à dire des quantités faisant intervenir des dilatations de signaux. Il n'est plus à noter l'apport fondamental de la transformation de FOURIER dans toute l'analyse des signaux dès lors que celle-ci fait apparaître des translations : la transformation de MELLIN joue exactement le même rôle pour les dilatations. Cette transformation a permis de mettre l'accent sur la continuité qui existe entre les signaux bande étroite et les signaux large bande : classe des distributions affines et classe de COHEN, ambiguïté de WOODWARD et ambiguïté généralisée, transformation Fourier à Court Terme et ondelette, qualité de l'estimation de la "fréquence Doppler" et du facteur de compression et enfin la transformation de FOURIER et transformation de MELLIN. Cette continuité est à prendre au sens où toute forme large bande tend vers son analogue bande étroite lorsque la largeur de bande relative des signaux tend vers zéro.

Références

- [1] **L.Cohen**, "Time-Frequency Distributions - A Review", Proc.IEEE, Vol.77, pp.941-981, 1989
- [2] **J.Bertrand P.Bertrand et J.P.Ovarlez**, "Discrete Mellin Transform for Signal Analysis", Proc. IEEE-ICASSP, Albuquerque, NM, USA 1990
- [3] **J.P.Ovarlez**, "La Transformation de Mellin : un Outil pour l'Analyse des Signaux à Large-Bande", Thèse University Paris 6, Paris, Avril 1992.
- [4] **J.Bertrand P.Bertrand**, "Représentation des Signaux à Large Bande", La Recherche Aérospatiale, No 5, pp.277-283, Sept-Oct 1985
- [5] **J.Bertrand P.Bertrand**, "A Class of Affine Wigner Functions with Extended Covariance Properties", J. Math. Phys., 33 (7), July 1993
- [6] **J.P.Ovarlez J.Bertrand P.Bertrand**, "Computation of Affine Time Frequency Representations Using the Fast Mellin Transform", Proc.IEEE-ICASSP, San Francisco, CA, USA 1992
- [7] **H.L.Van Trees**, "Detection, Estimation and Modulation Theory", Part I, II and III, John Wiley and Sons, New York 1971
- [8] **P.M.Woodward**, "Probability and Information Theory with Applications to Radar", Pergamon Press, New York 1953
- [9] **A.W.Rihaczek**, "Principles of High Resolution Radar", Mc Graw-Hill, New York, 1969
- [10] **J.Bertrand P.Bertrand et J.P.Ovarlez**, "Compression d'Impulsions en Large Bande", Proc. XII Col. GRETSI, pp.21-24, Juan Les Pins, France Juin 1989
- [11] **E.J.Kelly R.P.Wishner**, "Matched Filter Theory for High Velocity Accelerating Targets", IEEE Trans. on Military Elect., Mil 9, Janvier 1965
- [12] **J.P.Ovarlez**, "Cramer Rao Bound Computation for Velocity Estimation in the Broad Band Case Using the Mellin Transform", Proc.IEEE-ICASSP, Minneapolis, MN, USA 1993
- [13] **A.Papoulis**, "Signal Analysis", McGraw Hill, New York 1977
- [14] **J.Bertrand P.Bertrand J.P.Ovarlez**, "Dimensionalized Wavelet Transform with Application to Radar Imaging", Proc.IEEE-ICASSP, Toronto, Canada, 1991
- [15] **J.Bertrand P.Bertrand J.P.Ovarlez**, "Frequency Directivity Scanning in Laboratory Radar Imaging", International Journal of Imaging Systems, A paraître