



**Séminaire Temps-Fréquence
de la Branche Physique
14/12/2009**

Jean-Philippe OVARLEZ

ONERA/DEMR/TSI



r e t o u r s u r i n n o v a t i o n

QUELQUES NOTATIONS

Signal temporel et sa transformée de Fourier dans L^2

$$z(t) = a(t) e^{i \phi(t)} \qquad Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{2i\pi f t} dt = A(f) e^{i \psi(f)}$$

Produit scalaire dans L^2 (unitarité de la transformée de Fourier)

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} z_1(t) z_2^*(t) dt = \langle Z_1, Z_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_1(f) Z_2^*(f) df$$

Energie dans L^2 :
$$E_z = \int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(f)|^2 df$$

VALEURS MOYENNES D'OPERATEURS

● Valeur moyenne d'une fonction de la fréquence ou de l'opérateur fréquence

$$\langle g(f) \rangle = \langle g(\mathcal{W})z, z \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(f) |Z(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} z^*(t) g(\mathcal{W}) z(t) dt$$

avec \mathcal{W} l'opérateur fréquence : $\mathcal{W} = \frac{1}{2i\pi} \frac{d}{dt}$ ($\mathcal{W} = f\mathcal{I}$ en temps)

Etendue spectrale (cas centré) : $\sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |Z(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{W} z(t)|^2 dt$

● Valeur moyenne d'une fonction du temps ou de l'opérateur temps

$$\langle g(t) \rangle = \langle g(\mathcal{T})z, z \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Z^*(f) g(\mathcal{T}) Z(f) df$$

avec \mathcal{T} l'opérateur temps : $\mathcal{T} = -\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{df}$ ($\mathcal{T} = t\mathcal{I}$ en fréquence)

Etendue temporelle (cas centré) : $\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{T} Z(f)|^2 df$

DECOMPOSITION DU SIGNAL SUR DES BASES

● Un signal peut se décomposer comme suit :

$$z(t) = \int F(a) u(a, t) da \quad \text{avec} \quad F(a) = \int z(t) u^*(a, t) dt$$

● On peut choisir les fonctions de décompositions comme les fonctions propres d'un opérateur donné \mathcal{A}

$$\mathcal{A} u(a, t) = a u(a, t)$$

● Si l'opérateur est hermitien $\langle \mathcal{A}z, z \rangle = \langle z, \mathcal{A}z \rangle$, alors les fonctions propres forment une base complète et orthogonale

Exemple 1 : la résolution de $\mathcal{W}u(t, f) = f u(t, f)$ conduit à $u(t, f) = \lambda e^{2i\pi ft}$

Exemple 2 : la résolution de $\mathcal{T}u(t, a) = a u(t, a)$ conduit à $u(t, a) = \lambda \delta(t - a)$

OPÉRATEUR TRANSLATION

● Opérateur translation (ou déphasage) :

$$e^{2i\pi \tau \mathcal{W}} z(t) = z(t + \tau)$$

$$e^{2i\pi \nu \mathcal{T}} Z(f) = Z(f - \nu)$$

$$e^{2i\pi \tau \mathcal{W}} Z(f) = e^{2i\pi \tau f} Z(f)$$

$$e^{2i\pi \nu \mathcal{T}} z(t) = e^{2i\pi \nu t} z(t)$$

● La combinaison des deux opérateurs temps et fréquence $e^{2i\pi (\nu \mathcal{T} + \tau \mathcal{W})}$ devient un problème car les opérateurs ne commutent pas. Le commutateur est défini comme :

$$[\mathcal{T}, \mathcal{W}] = \mathcal{T} \mathcal{W} - \mathcal{W} \mathcal{T} = \frac{i}{2\pi} \mathcal{I}$$

● Si les opérateurs commutent avec leur commutateur, on peut écrire :

$$e^{2i\pi (\nu \mathcal{T} + \tau \mathcal{W})} = e^{i\pi \tau \mathcal{W}} e^{2i\pi \nu \mathcal{T}} e^{i\pi \tau \mathcal{W}}$$

● Relation d'incertitude (générale entre deux opérateurs)

$$\sigma_{\mathcal{T}}^2 \sigma_{\mathcal{W}}^2 \geq \frac{1}{2} |\langle [\mathcal{T}, \mathcal{W}] \rangle|$$

SIGNAL ANALYTIQUE

Un signal réel $x(t) = a(t) \cos \phi(t)$ peut s'écrire comme la partie réelle d'une infinité de formes complexes :

$$z(t) = \alpha(t) e^{i\beta(t)}$$

L'unicité de cette représentation est donnée par la notion de signal analytique (à fréquences positives)

$$z(t) = x(t) + i H\{x(t)\} = x(t) + \frac{i}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(s)}{t-s} ds$$

Le module du signal analytique associé au signal réel définit *l'enveloppe*

$$a(t) = |z(t)|$$

La dérivée de la phase du signal analytique associé au signal réel définit *la fréquence instantanée*

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d \arg z(t)}{dt}$$

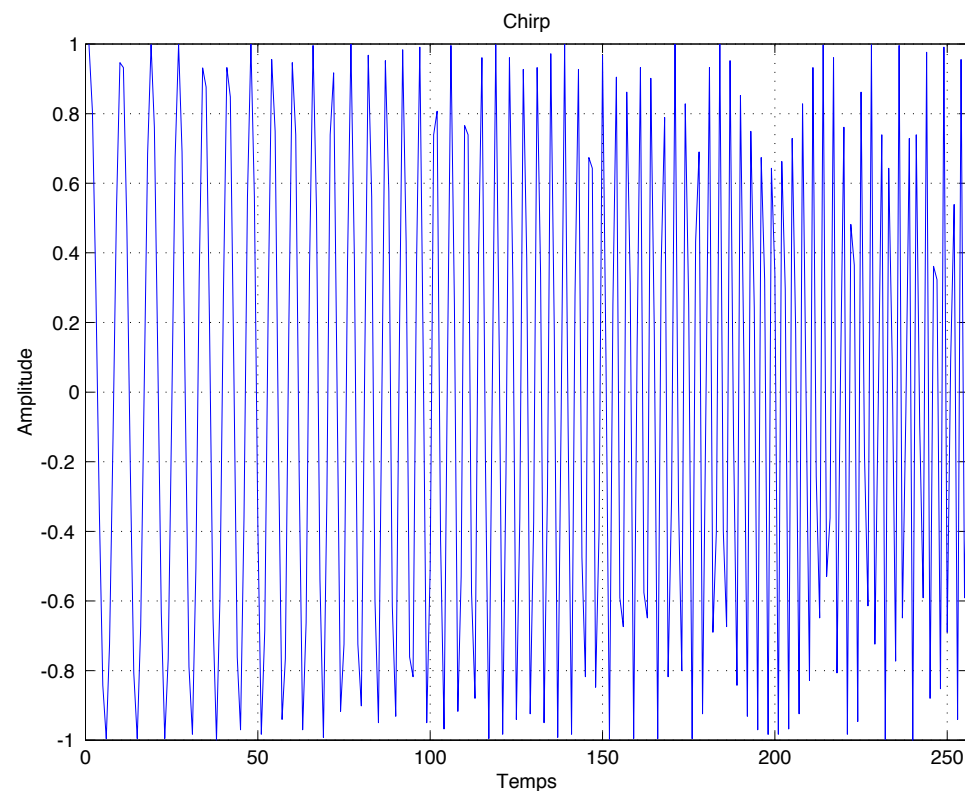
PRESENTATION DE L'OUTIL TEMPS-FREQUENCE

But : Analyse des signaux non stationnaires (parole, radar, contrôle non destructif, ...)

Moyen : Décomposition du signal sur une base dédiée : analyse temps-fréquence linéaire

Analyse Temporelle

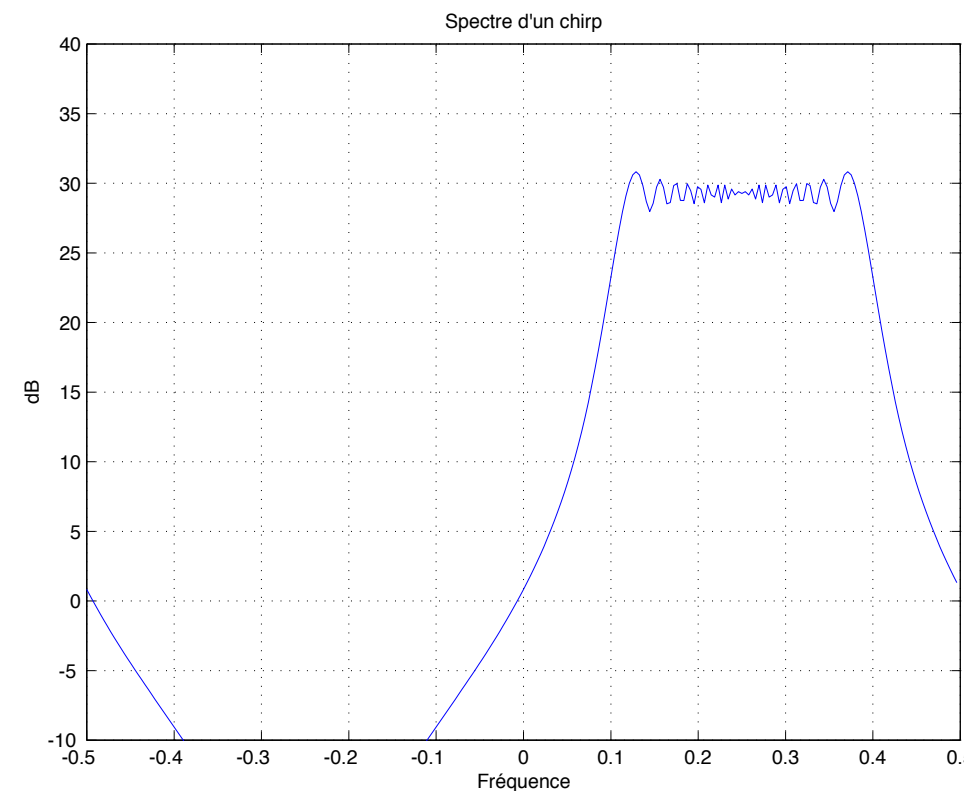
Shannon



$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(u) \delta(u - t) du$$

Analyse Spectrale

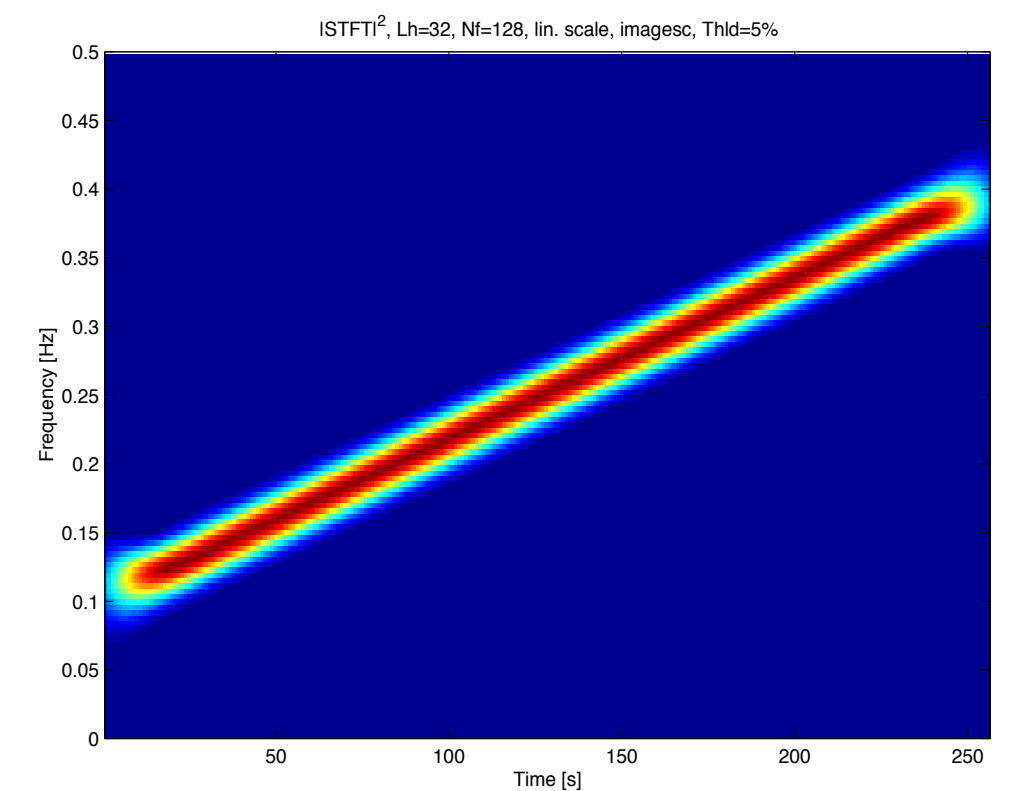
Fourier



$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(v) e^{2i\pi vt} dv$$

Analyse mixte Temps-Fréquence

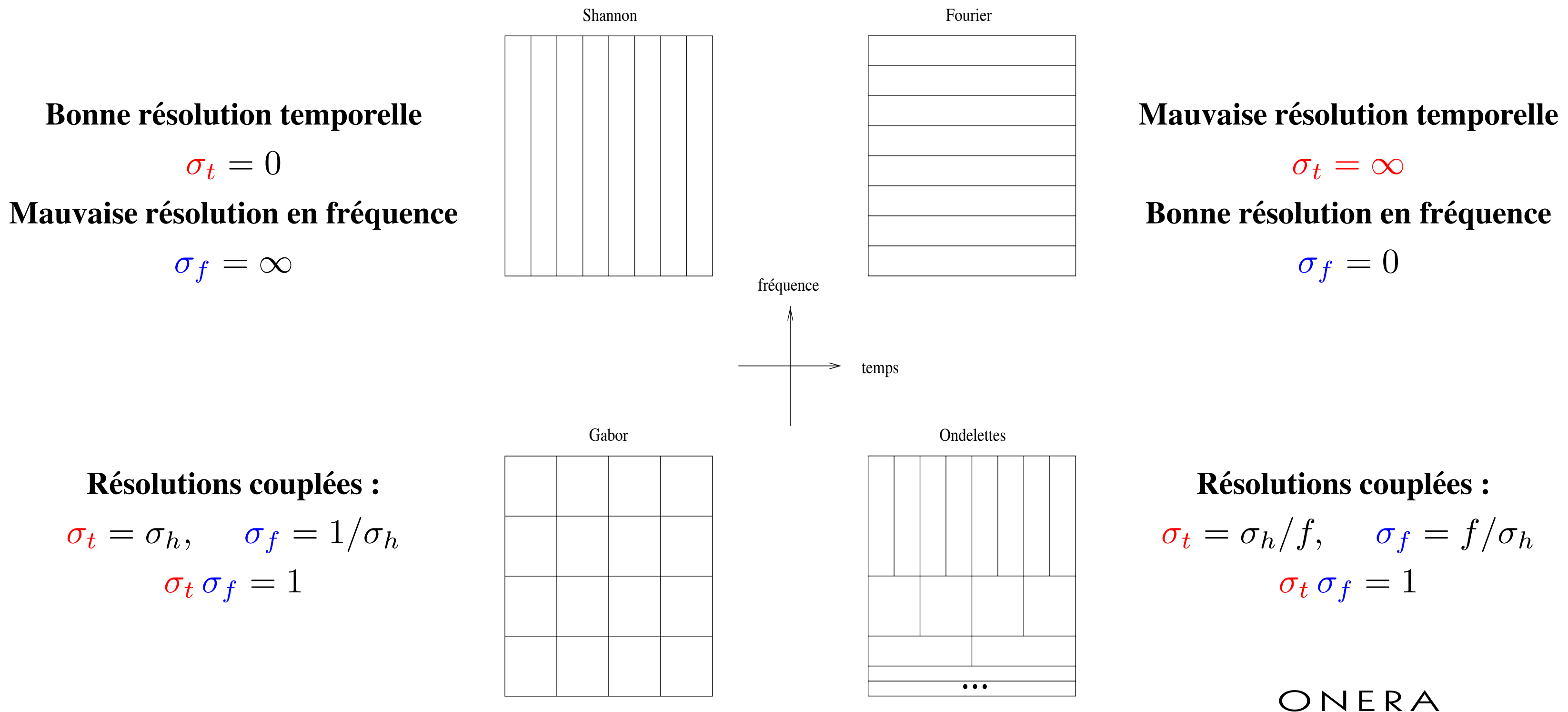
Gabor, Ondelettes, Court terme



$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(u, v) g_{u,v}(t) du dv$$

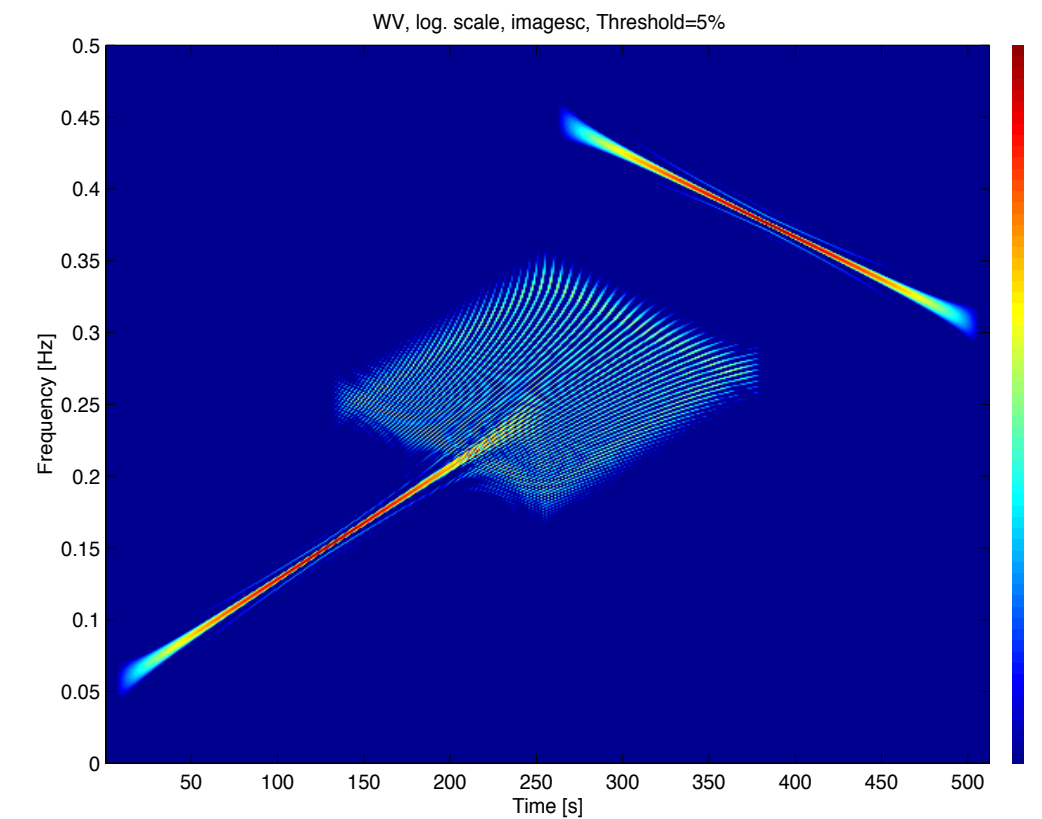
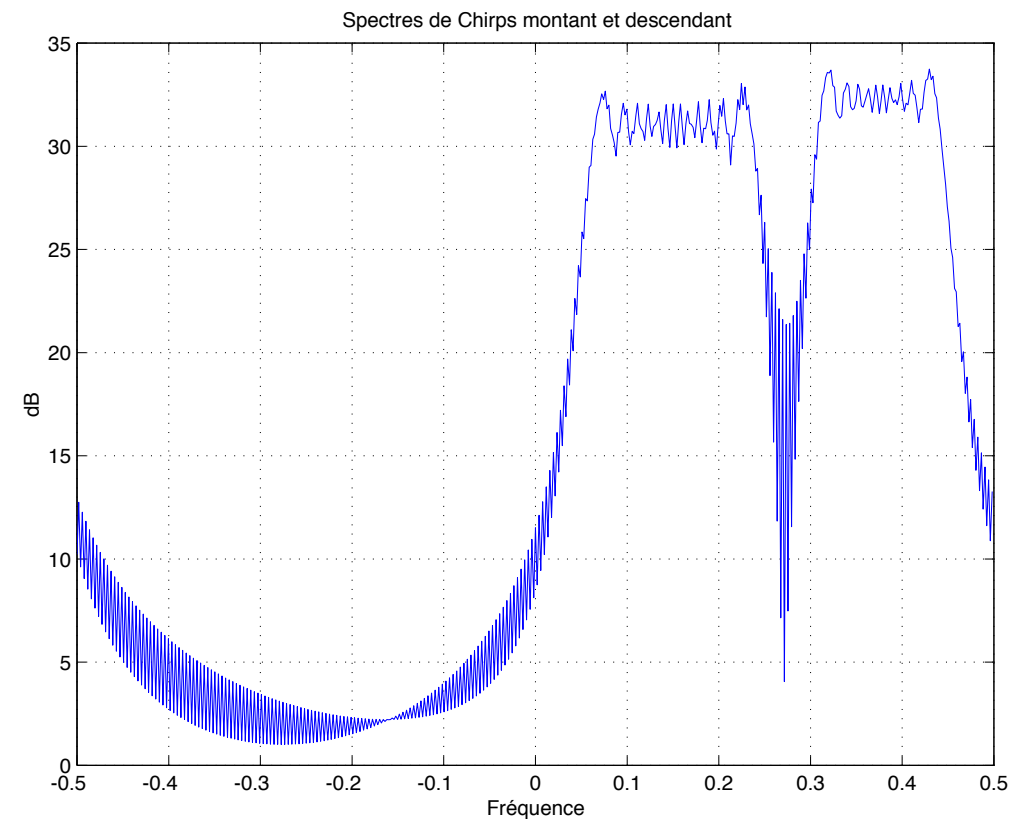
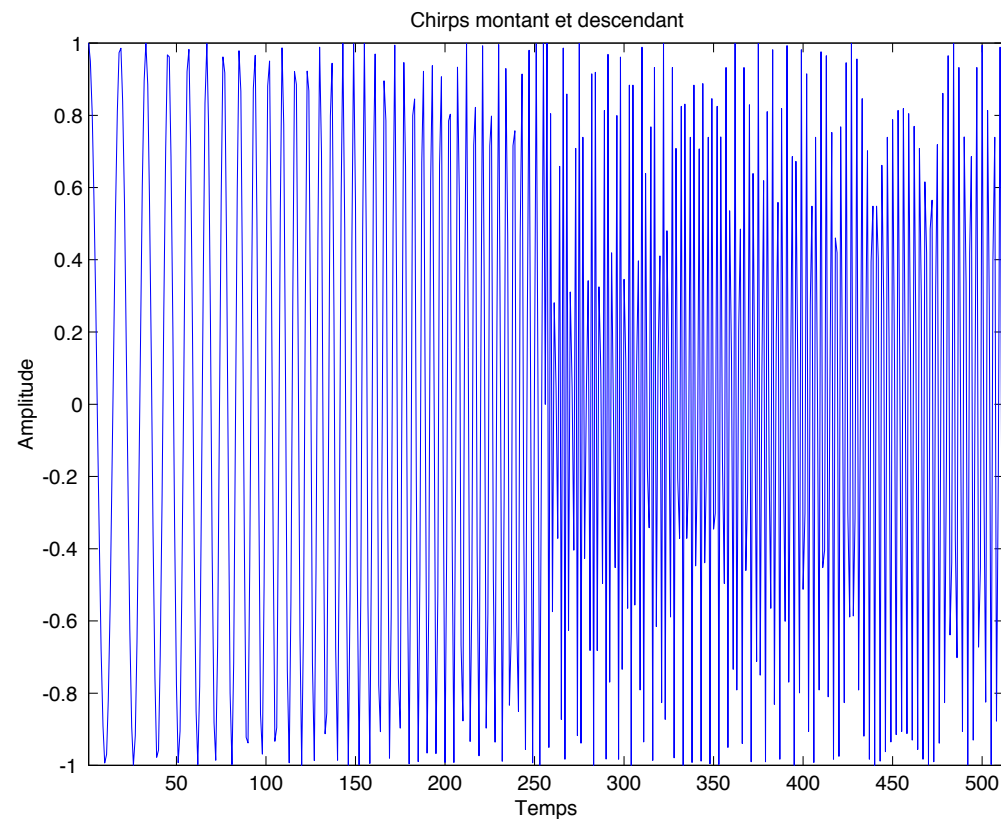
PAVAGE DU PLAN TEMPS-FREQUENCE - RELATION D'INCERTITUDES

- **Inégalité d'Heinseberg** : pour tout signal h , on a $\sigma_t^h \sigma_f^h \geq 1$
- Le seul signal qui vérifie l'égalité est la gaussienne : $\sigma_h = \sigma_t^h = 1/\sigma_f^h$

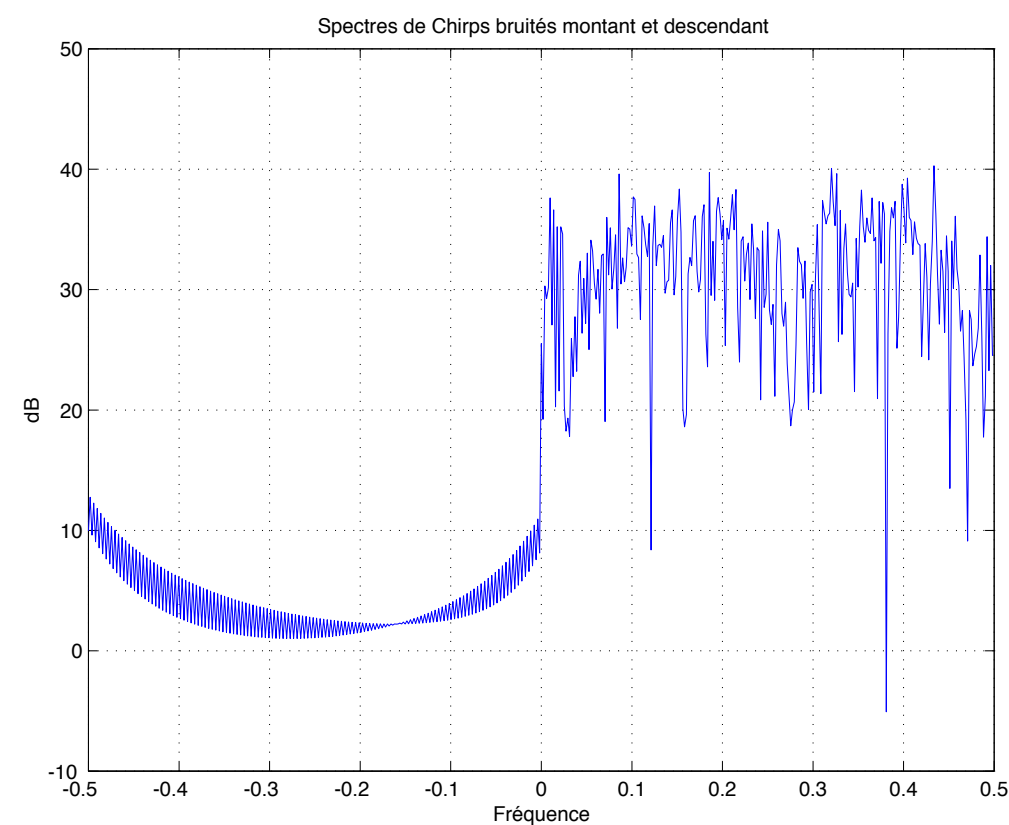
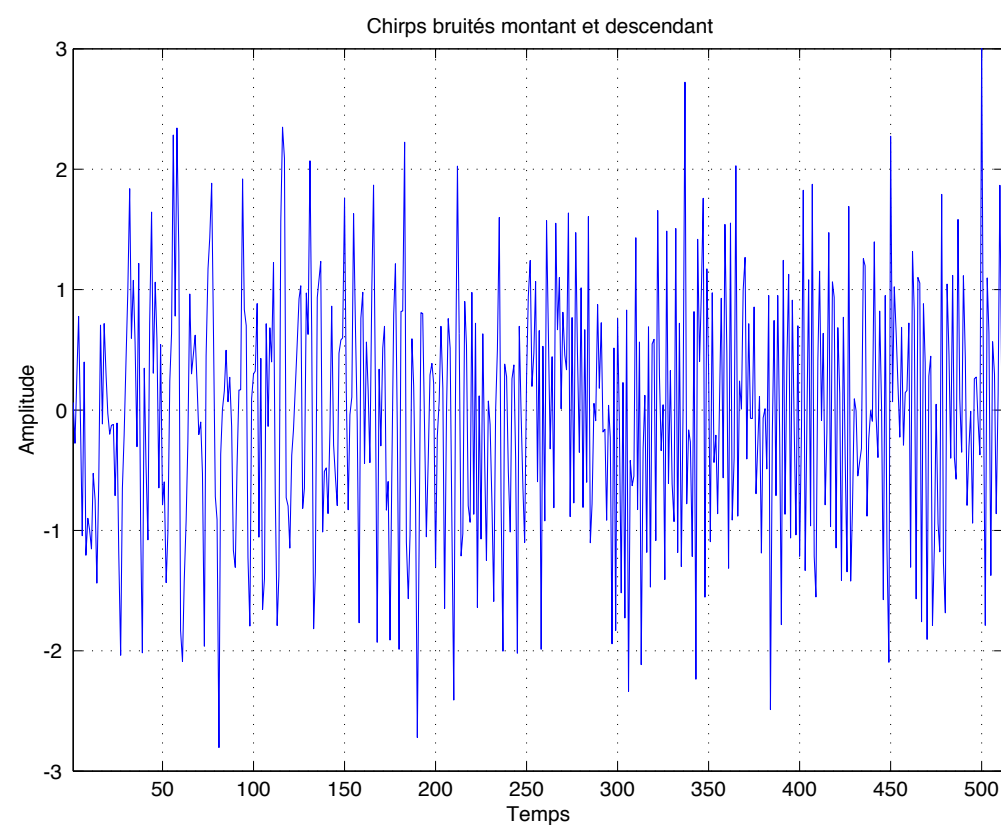


AVANTAGE DE L'ANALYSE TEMPS-FREQUENCE

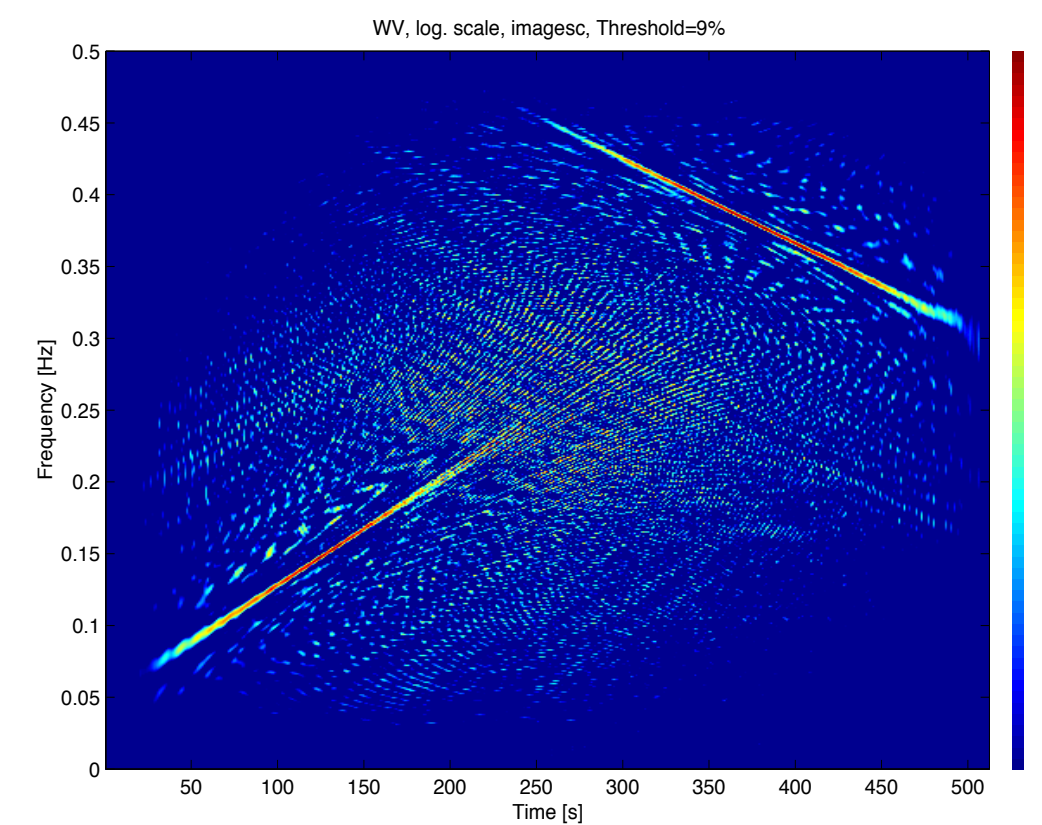
Lisibilité, accès aux lois de fréquence instantanée ou au retard de groupe des signaux, résistance au bruit



Analyse Temporelle



Analyse mixte temps-Fréquence



CONSTRUCTION DE L'OUTIL TEMPS-FREQUENCE

But : Définir une fonctionnelle $P(t, f)$ du signal $z(t)$ permettant de

- répartir l'énergie totale E_z du signal $z(t)$ dans le plan temps et fréquence,

$$E_z = \int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_z(t, f) df dt$$

- retrouver par marginalisation la puissance instantanée et la densité spectrale d'énergie du signal :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_z(t, f) df = |z(t)|^2 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} P_z(t, f) dt = |Z(f)|^2$$

PROPRIETES RECHERCHEES

- **Principe de Covariance** : Cohérence de la représentation après une transformation physique \mathcal{T} du signal $z(t)$

$$\begin{array}{ccc} z & \rightarrow & P_z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T} z & \rightarrow & P_{\mathcal{T} z} = \mathcal{T}' P_z \end{array}$$

Ex : translation de temps, translation de fréquence (effet Doppler approximé), changement d'échelle (vrai effet Doppler), rotation, Lorentz, ...

- **Unitarité** : Conservation du produit scalaire entre l'espace des signaux et l'espace des représentations (Théorème de Parseval étendu)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{z_1}(t, f) P_{z_2}(t, f) dt df = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} z_1(t) z_2^*(t) dt \right|^2$$

PROPRIETES RECHERCHEES

En notant $z(t) = a(t) e^{i\phi(t)} \longrightarrow Z(f) = A(f) e^{i\psi(f)}$

- Accès à la Fréquence instantanée $f_i(t)$ et au retard de groupe $\tau_g(f)$ par marginalisation.

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f P_z(t, f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} P_z(t, f) df}$$

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\psi}{df} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t P_z(t, f) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} P_z(t, f) dt}$$

- Localisation sur des signaux donnés :

- signaux monochromatiques : $z(t) = e^{2i\pi f_0 t} \longrightarrow P_z(t, f) = \delta(f - f_0)$
- signaux chocs : $z(t) = \delta(t - t_0) \longrightarrow P_z(t, f) = \delta(t - t_0)$
- loi de modulation quelconque : $z(t) = e^{i\phi(t)} \longrightarrow P_z(t, f) = \delta\left(t - \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}\right)$

- Conservation des supports temporel et spectral

- Positivité

CONSTRUCTION DE L'OUTIL TEMPS-FREQUENCE

● Construction par les fonctions caractéristiques en théorie des probabilités et la théorie des opérateurs

La fonction caractéristique est la transformée de Fourier de la densité de probabilité

$$M(\tau, \nu) = \langle e^{2i\pi(\nu t + \tau f)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t, f) e^{2i\pi(\nu t + \tau f)} dt df$$

Cette fonction caractéristique peut être vue comme la valeur moyenne d'un opérateur (à définir !!)

$$M(\tau, \nu) = \langle \mathcal{M}(\tau, \nu) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} z^*(t) \mathcal{M}(\tau, \nu) z(t) dt$$

ex : avec $\mathcal{M}(\tau, \nu) = e^{2i\pi(\nu \mathcal{T} + \tau \mathcal{W})} = e^{2i\pi(\nu \mathcal{T} + \tau \mathcal{W})} = e^{i\pi \tau \mathcal{W}} e^{2i\pi \nu \mathcal{T}} e^{i\pi \tau \mathcal{W}}$
on obtient la fonction d'ambiguïté bien connue en radar

$$M(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{2i\pi \nu t} dt$$

CONSTRUCTION DE L'OUTIL TEMPS-FREQUENCE

Construction par modèle de noyau respectant des contraintes

Pour conserver la notion première de répartition d'énergie dans le plan temps-fréquence, ces distributions sont construites sur des formes bilinéaires $z(u) z^*(v)$ du signal temporel (ou, de manière équivalente, fréquentiel $Z(u) Z^*(v)$) :

$$\begin{aligned} P_z(t, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \textcolor{red}{K}(u, v; t, f) \textcolor{blue}{z}(u) \textcolor{blue}{z}^*(v) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \textcolor{red}{\hat{K}}(u, v; t, f) \textcolor{blue}{Z}(u) \textcolor{blue}{Z}^*(v) du dv, \end{aligned}$$

le noyau $K(u, v; t, f)$ ou $\hat{K}(u, v; t, f)$ restant à déterminer d'après les propriétés recherchées.

COVARIANCE PAR LE GROUPE DES TRANSLATIONS

Problème : Détermination de la classe de solutions covariantes par le groupe de transformation des translations en temps et en fréquence :

$$\begin{array}{ccc} z(t) & \longrightarrow & z'(t) = e^{-2i\pi f_0 t} z(t - t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_z(t, f) & \longrightarrow & P_{z'}(t, f) = P_z(t - t_0, f - f_0) \end{array}$$

Solution : Classe de COHEN paramétrée par un noyau $\psi(\xi, \tau)$

$$\begin{aligned} P_z(t, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\xi(s-t)} \psi(\xi, \tau) z\left(s + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(s - \frac{\tau}{2}\right) e^{-2i\pi f\tau} d\xi ds d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(s - t, \xi - f) W_z(s, \xi) ds d\xi \end{aligned}$$

avec $\psi(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t, f) e^{-2i\pi(f\tau + \xi t)} dt df$ et $\Pi(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} K\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}; 0, 0\right) e^{-2i\pi f\tau} d\tau$
et

$$W_z(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-2i\pi f\tau} d\tau$$

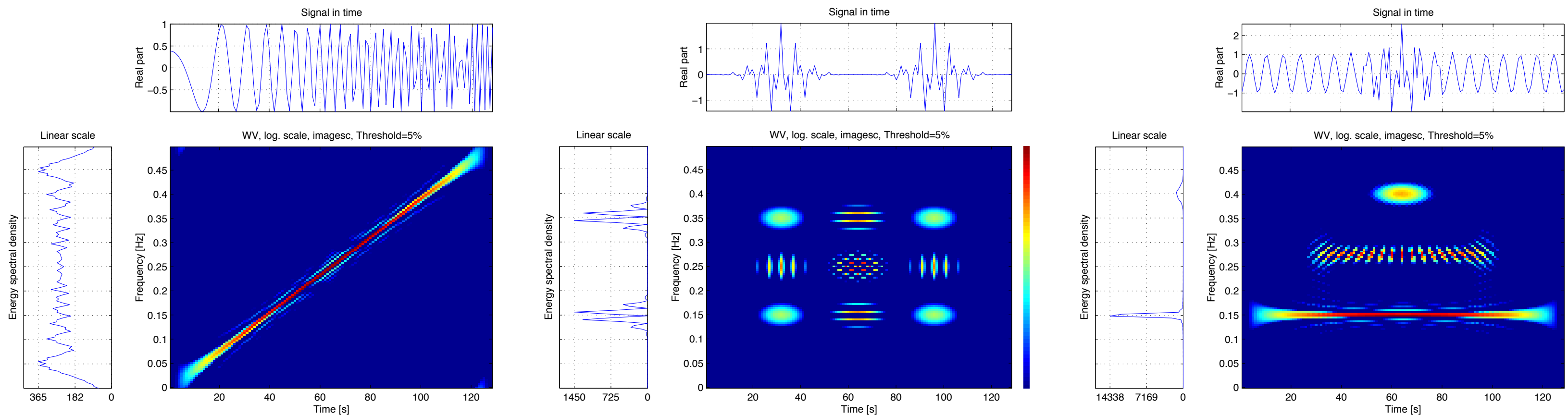
LES PRINCIPALES DISTRIBUTIONS DE LA CLASSE DE COHEN

Nom	$\psi(\xi, \tau)$	$P_z(t, f)$
Wigner-Ville	1	$\int_{-\infty}^{+\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-2i\pi f\tau} d\tau$
s-Wigner	$e^{2i\pi s\xi\tau}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} z\left(t - \left(s - \frac{1}{2}\right)\tau\right) z^*\left(t - \left(s + \frac{1}{2}\right)\tau\right) e^{-2i\pi f\tau} d\tau$
Rihaczek	$e^{i\pi\xi\tau}$	$z(t) Z^*(f) e^{-2i\pi f\tau}$
Born-Jordan	$\frac{\sin \pi\xi\tau}{\pi\xi\tau}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{ \tau } \int_{t- \tau /2}^{t+ \tau /2} z\left(s + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(s - \frac{\tau}{2}\right) ds \right] e^{-2i\pi f\tau} d\tau$
Choi-Williams	$e^{-(\pi\xi\tau/\sigma)^2/2}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma}{ \tau } e^{-2\sigma^2(s-t)^2/\tau^2} z\left(s + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(s - \frac{\tau}{2}\right) e^{-2i\pi f\tau} ds d\tau$
Spectrogramme	$A_h(\xi, \tau)$	$\left \int_{-\infty}^{+\infty} z(s) h^*(s - t) e^{-2i\pi fs} ds \right ^2$
Séparable	$G(\xi) h(\tau)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) g(s - t) z\left(s + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(s - \frac{\tau}{2}\right) e^{-2i\pi f\tau} ds d\tau$

CAS PARTICULIERS DE DISTRIBUTIONS DE LA CLASSE DE COHEN

- **WIGNER-VILLE (E.P. Wigner en mécanique quantique en 1932) : distribution la plus populaire**

$$W_z(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\left(t + \frac{u}{2}\right) z^*\left(t - \frac{u}{2}\right) e^{-2i\pi f u} du = \int_{-\infty}^{+\infty} Z\left(f + \frac{\nu}{2}\right) Z^*\left(f - \frac{\nu}{2}\right) e^{2i\pi f \nu} d\nu$$



- **Reliée à la fonction d'ambiguïté radar $A_z(\tau, \nu)$ par simple transformation de Fourier 2D**

$$A_z(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\left(u + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-2i\pi \nu u} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_z(t, f) e^{-2i\pi(\nu t + f \tau)} dt df$$

INCONVENIENTS

- Aucune distribution ne satisfait à toutes les contraintes (ex : positivité et unitarité)
- Illisibilité due aux interférences entre composantes élémentaires du signal



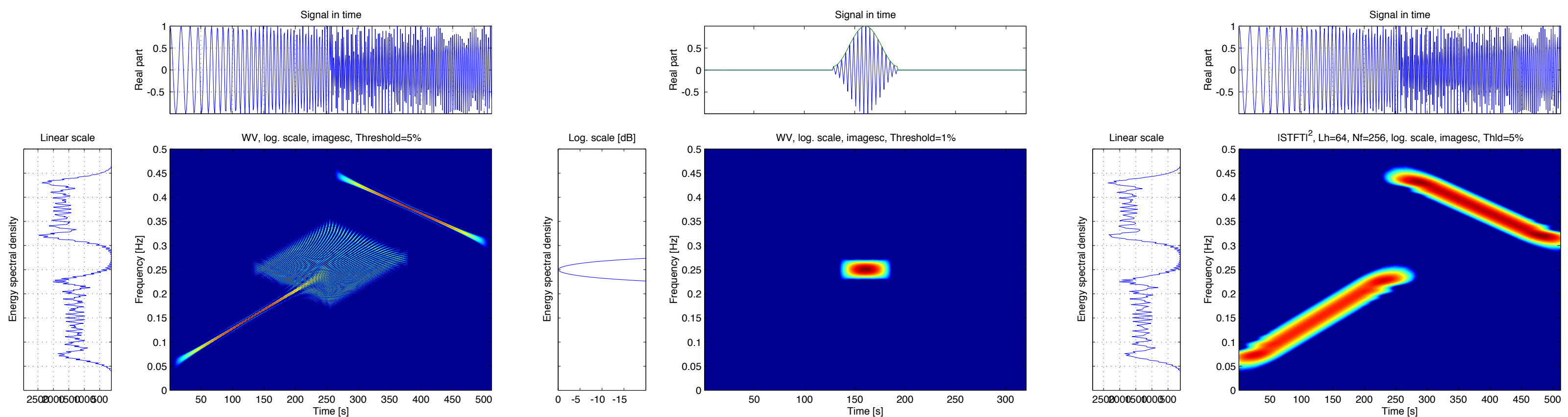
- Nécessité de *”gommer”* les interférences

REGULARISEES DE DISTRIBUTIONS DE LA CLASSE DE COHEN

Lissage des distributions temps-fréquence \longrightarrow Spectrogramme (Fourier à Court Terme, GABOR) :

$$P_l(t_0, f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_z(t, f) P_h(t - t_0, f - f_0) df dt = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} z(u) h^*(u - t_0) e^{-2i\pi f_0 u} du \right|^2$$

où $h(t) e^{2i\pi f_0 t}$ est une fenêtre analysante localisée en $t = 0$ et en $f = f_0$.



$P_z(t, f)$

$P_h(t - t_0, f - f_0)$

$P_l(t_0, f_0)$

Inconvénients : Inégalité d'Heisenberg, aucun contrôle de l'étendue de la fenêtre conjointement en temps et fréquence.

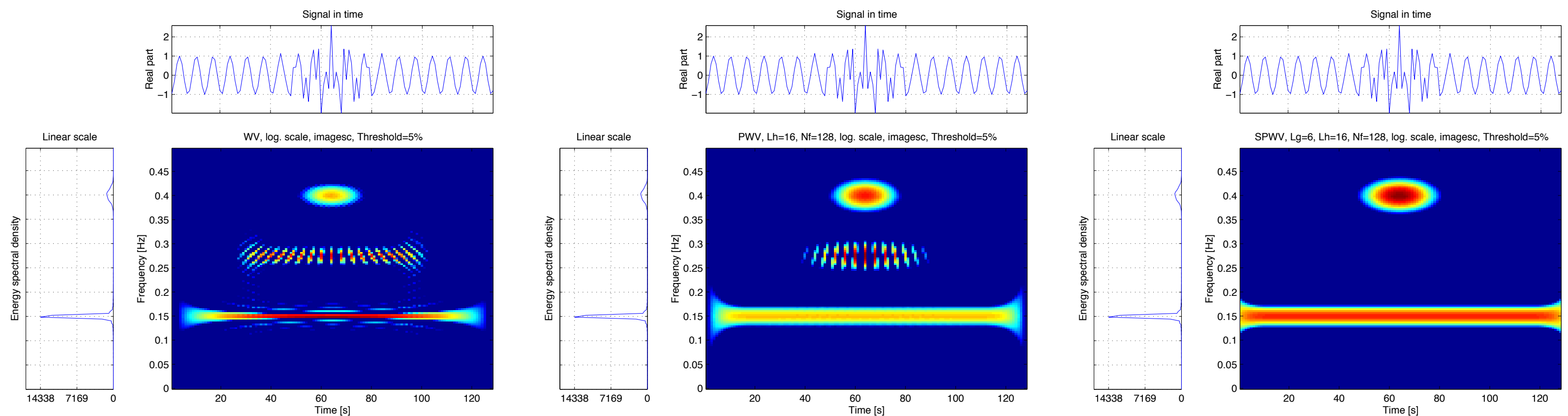
ONERA

LISSAGE DES DISTRIBUTIONS DE LA CLASSE DE COHEN

Lissage séparable ($P_h(t, f) = g(t) H(f)$) des distributions \rightarrow Pseudo Wigner-Ville Lissée :

$$P_z(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} g(s - t) z(s + \tau/2) z^*(s - \tau/2) e^{-2i\pi f\tau} ds d\tau$$

Si $g(t) = \delta(t)$, on obtient la Pseudo Wigner-Ville



Wigner-Ville

Pseudo Wigner-Ville

Pseudo Wigner-Ville Lissée

REALLOCATION DES DISTRIBUTIONS DE LA CLASSE DE COHEN

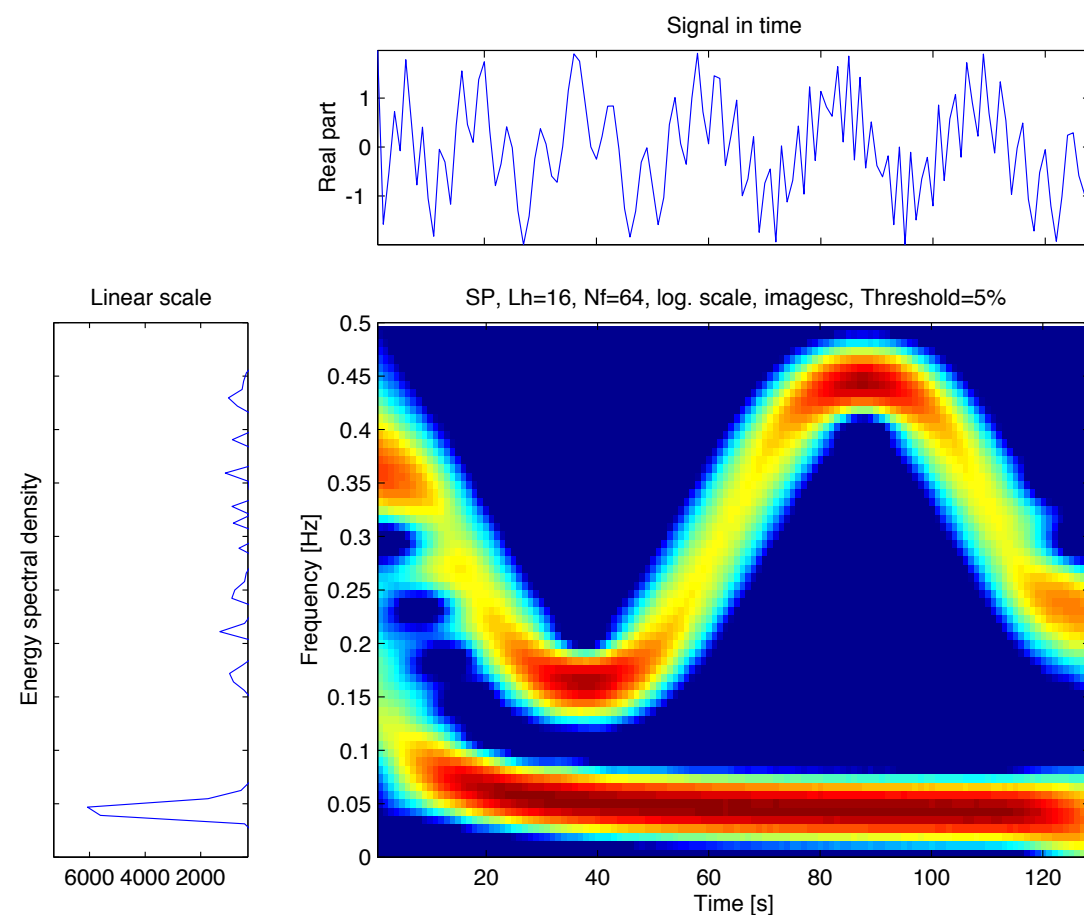
Réallocation de l'énergie autour des barycentres d'énergie :

$$P_m(t', f') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t, f) \delta(t' - \hat{t}(t, f)) \delta(f' - \hat{f}(t, f)) dt df$$

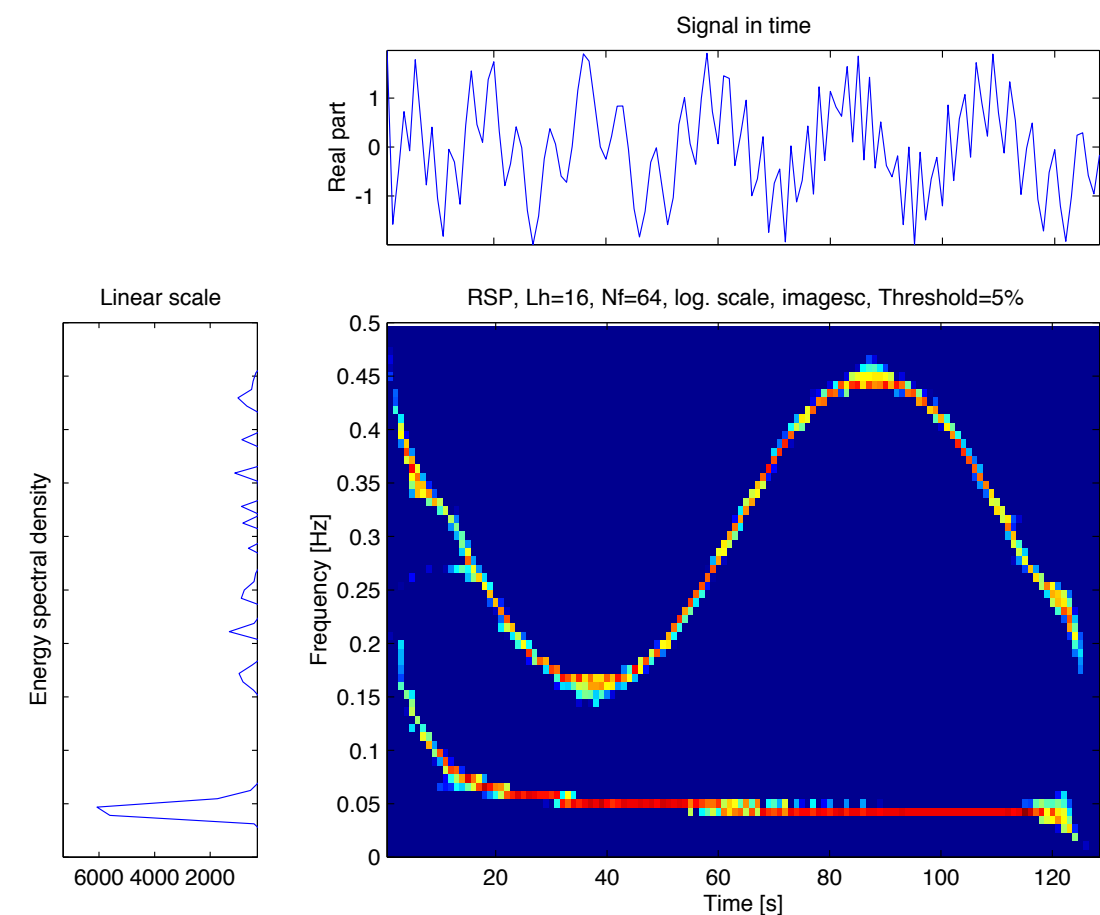
avec

$$\hat{t}(t, f) = t - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t_0 \phi(t_0, f_0) W_z(t - t_0, f - f_0) dt_0 df_0$$

$$\hat{f}(t, f) = f - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0 \phi(t_0, f_0) W_z(t - t_0, f - f_0) dt_0 df_0$$



Spectrogramme



Spectrogramme Réalloué

LIMITATION DE LA CLASSE DE COHEN

- Construction cohérente pour la classe des signaux dits à *bande étroite* ($B/f_0 \ll 1$) pour laquelle le groupe de covariance des translations en temps et en fréquence s'applique :
Exemple : Effet Doppler en radar souvent assimilé à une translation de fréquence en bande étroite.
- Le groupe de covariance ne conserve pas l'espace des signaux réels et l'espace des signaux analytiques (à fréquence positive),
- Impossibilité pour la classe de Cohen de localiser des signaux réels dits à *large bande*.
- La localisation parfaite sur les signaux complexes (chocs, chirps) n'est due qu'aux interactions constructives et destructives entre les composantes à fréquence positive et négative.



Nécessité d'une construction plus cohérente basée sur le groupe physique des translations-dilatations en temps.

CLASSES DE SOLUTIONS COVARIANTES PAR LE GROUPE AFFINE

Problème : Détermination de la classe de solutions covariantes par le groupe affine des translations en temps et des contractions-dilatations en temps :

$$\begin{array}{ccc} Z(f) & \longrightarrow & Z'(f) = a^{r+1} e^{-2i\pi t_0 f} Z(af) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_Z(t, f) & \longrightarrow & P_{Z'}(t, f) = a^q P_Z(a^{-1}(t - t_0), af) \end{array}$$

Solution : Classe de BERTRAND paramétrée par un noyau $K(u, v)$

$$P_Z(t, f) = f^{2r+2-q} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} K(u, v) Z(fu) Z^*(fv) e^{2i\pi ft(u-v)} du dv$$

CAS PARTICULIERS DES DISTRIBUTIONS AFFINES

- Fonctions Affines de Wigner $P_Z^{(k)}(t, f)$ à noyau $K(u, v)$ diagonal

$$P_Z^{(k)}(t, f) = f^{2r+2-q} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_k(u) Z(f \lambda_k(u)) Z^*(f \lambda_k(-u)) e^{2i\pi f t (\lambda_k(u) - \lambda_k(-u))} du$$

où $\lambda_k(u) = \left[k \frac{e^{-u} - 1}{e^{-ku} - 1} \right]^{\frac{1}{k-1}}$ et $\mu_k(u)$ est une fonction restant à déterminer d'après les propriétés recherchées.

Exemple : Affine unitaire ($k = 0$)

$$P_Z^{(0)}(t, f) = f^{2r+2-q} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{u}{2 \sinh(u/2)} \right]^{2r+2} Z\left(f \frac{u e^{u/2}}{2 \sinh(u/2)}\right) Z^*\left(f \frac{u e^{-u/2}}{2 \sinh(u/2)}\right) e^{2i\pi f t u} du$$

- localise parfaitement les signaux chocs et les signaux hyperboliques
- tend en bande étroite vers la distribution de Wigner-Ville (pour les signaux analytiques)
- reliée à la fonction d'ambiguïté large-bande

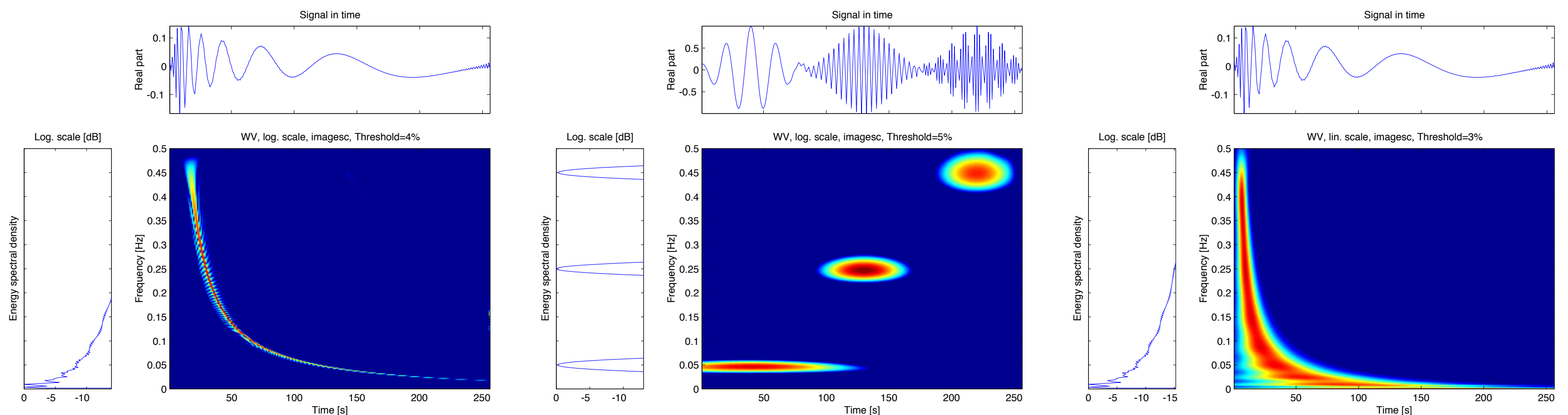
ONERA

REGULARISEES DES DISTRIBUTIONS AFFINES : ONDELETTES

Lissage des distributions temps-fréquence affines \longrightarrow Transformation en Ondelettes

$$\tilde{P}(t_0, f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} P_Z^{(0)}(t, f) P_{\Psi}^{(0)} \left(f_0 (t - t_0), \frac{f}{f_0} \right) dt df = f_0^{-1} \left| \int_0^{+\infty} Z(f) \Psi^* \left(\frac{f}{f_0} \right) e^{2i\pi f t_0} df \right|^2$$

où $\Psi(f) e^{2i\pi f t}$ est l'ondelette mère analysante localisée autour de la fréquence $f = 1$ et du temps $t = 0$.



$$P_Z^{(0)}(t, f)$$

$$P_{\Psi}^{(0)} \left(f_0 (t - t_0), \frac{f_0}{f} \right)$$

$$\tilde{P}(t_0, f_0)$$

Inconvénients : Inégalité d'Heisenberg, pas de contrôle de l'étendue de la fenêtre en temps et fréquence

TOMOGRAPHIE DES DISTRIBUTIONS TEMPS-FREQUENCE

En s'appuyant sur la propriété d'unitarité : $\langle P_z(t, f), P_h(t, f) \rangle = \langle z, h \rangle = \langle Z, H \rangle$, on obtient respectivement pour la distribution de Wigner-Ville $W_z(t, f)$ et celle de Bertrand $P_Z^{(0)}(t, f)$:

- pour $h(t) = e^{i\pi(a t^2 + 2b t)}$ définissant un signal *chirp* général

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_z(t, f) \delta(f - at - b) dt df = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-i\pi a t^2} e^{-2i\pi b t} dt \right|^2$$

Transformation de Radon sur la distribution de Wigner-Ville \longrightarrow Transformation de Fourier fractionnaire

- pour $H(f) = f^{-2i\pi\beta-1/2} e^{-2i\pi f\xi} Y(f)$ définissant un signal à retard de groupe *hyperbolique*

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_Z^{(0)}(t, f) \delta\left(t - \xi - \frac{\beta}{f}\right) dt df = \left| \int_0^{+\infty} Z(f) e^{2i\pi\xi f} f^{2i\pi\beta-1/2} df \right|^2.$$

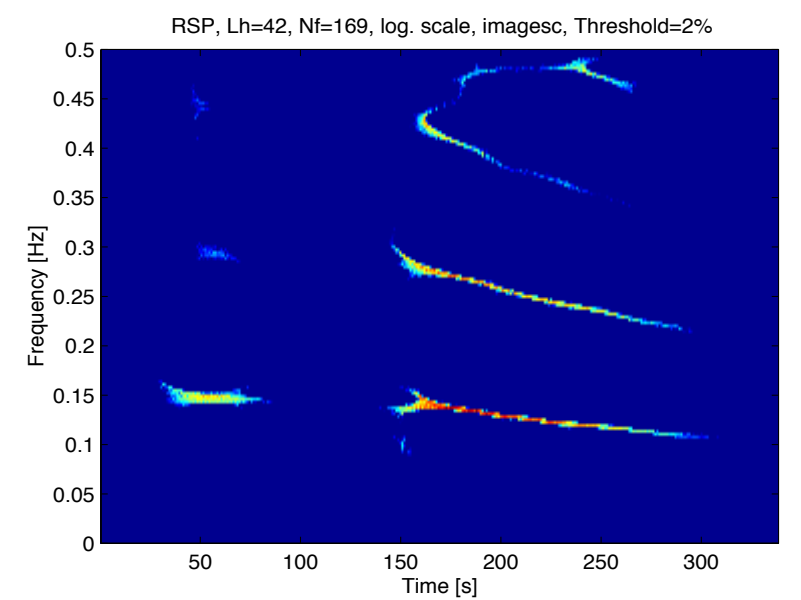
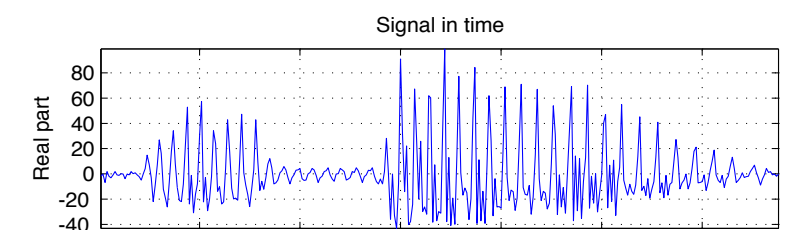
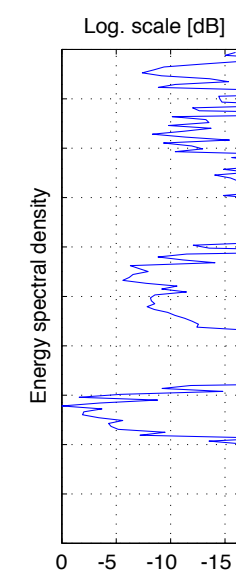
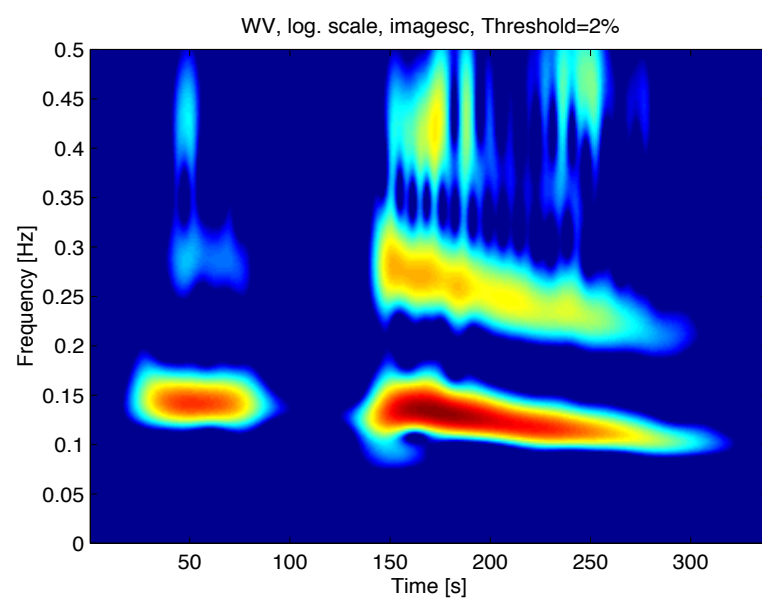
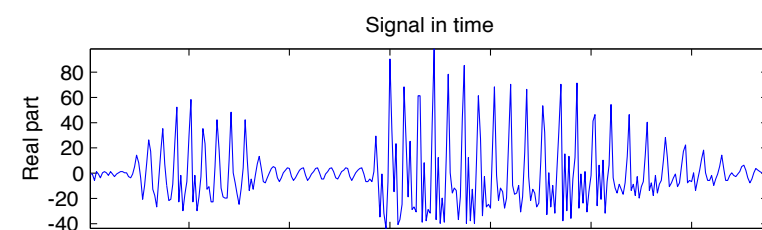
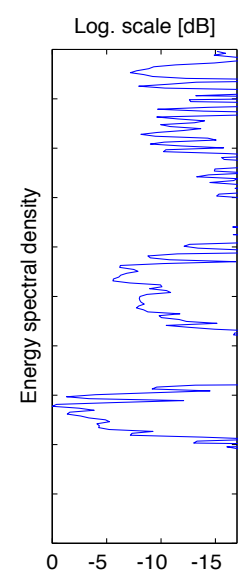
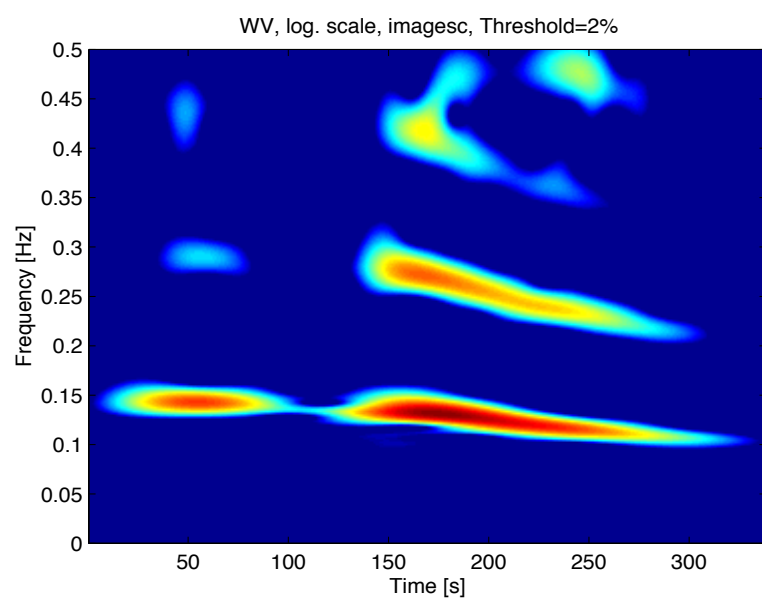
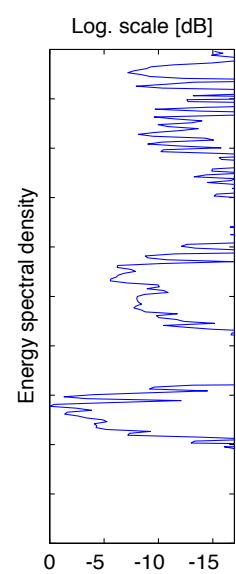
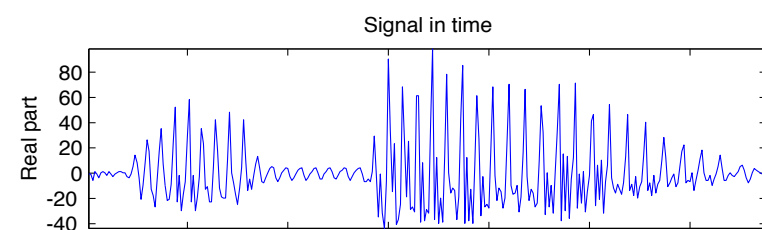
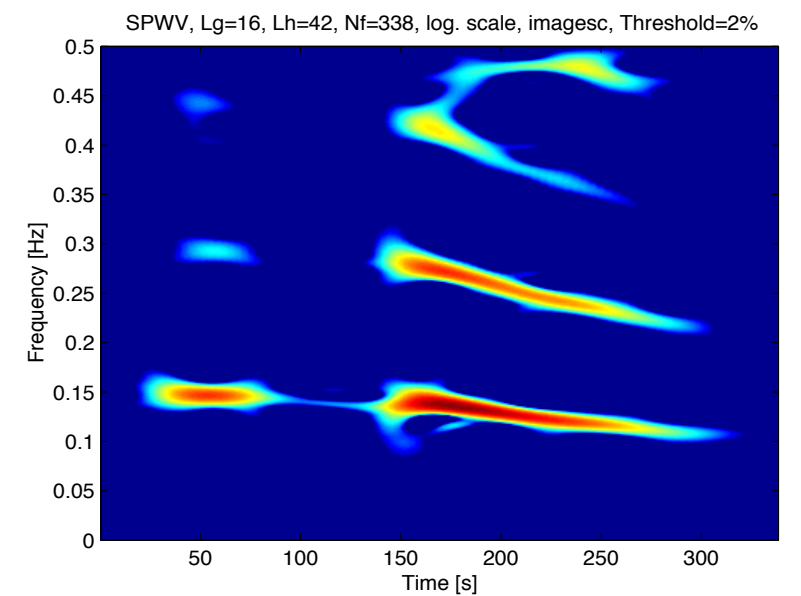
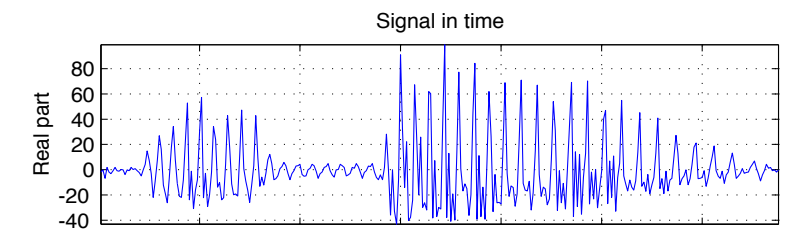
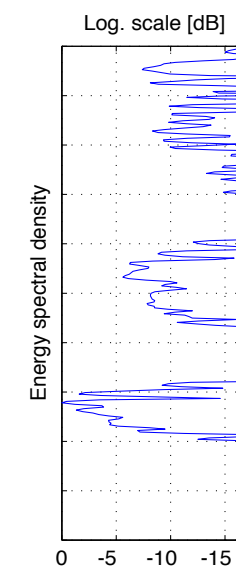
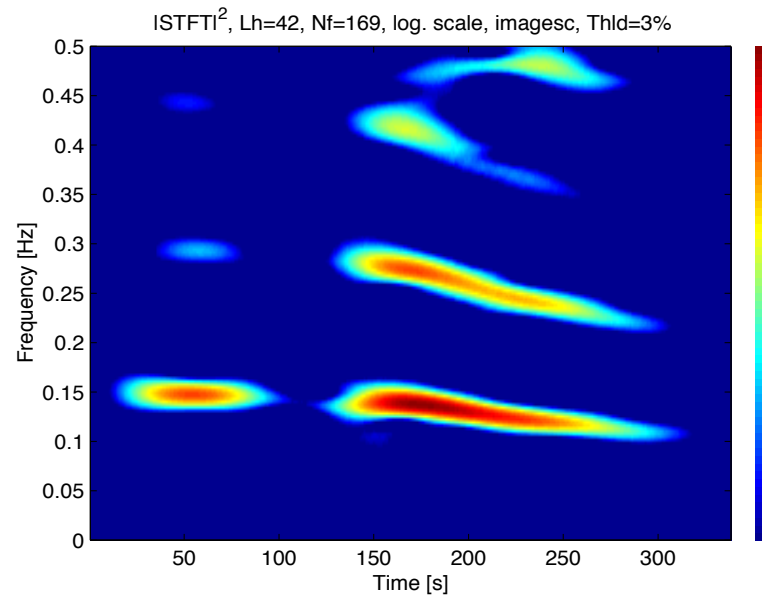
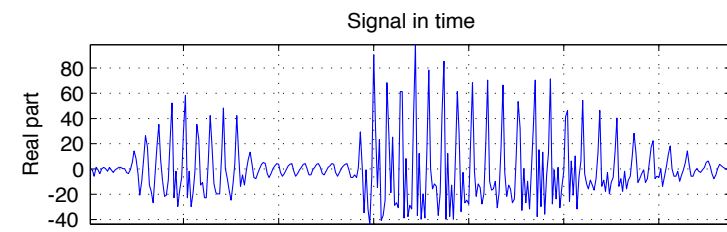
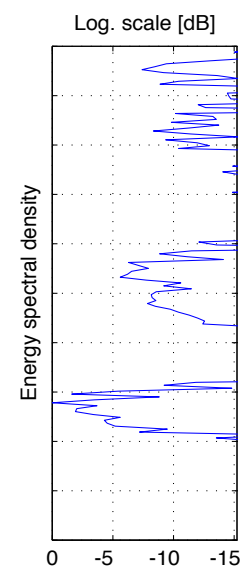
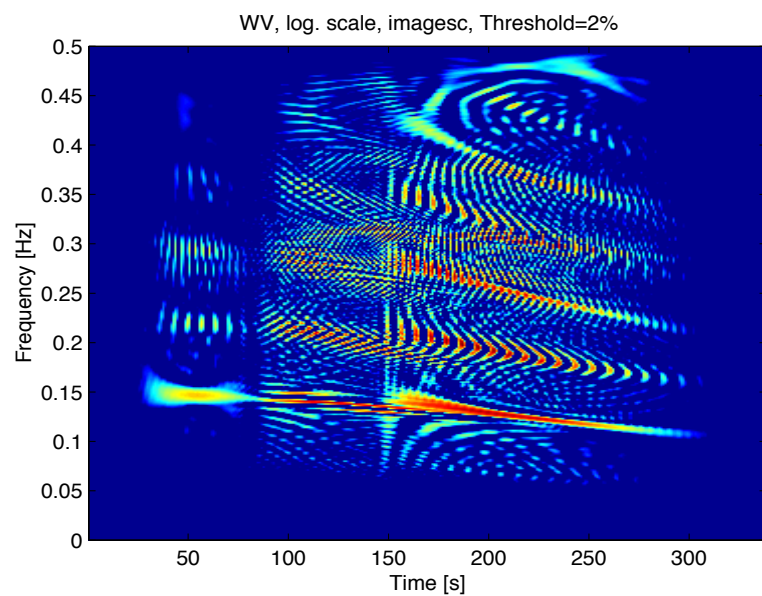
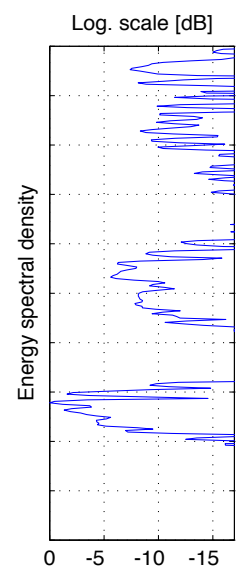
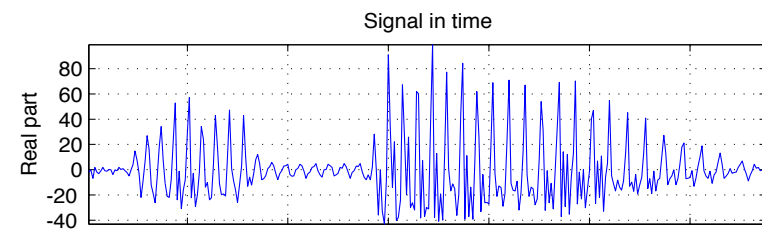
Transformation de Radon généralisée sur la distribution de Bertrand \longrightarrow Transformation de Mellin

LES ONDELETTES

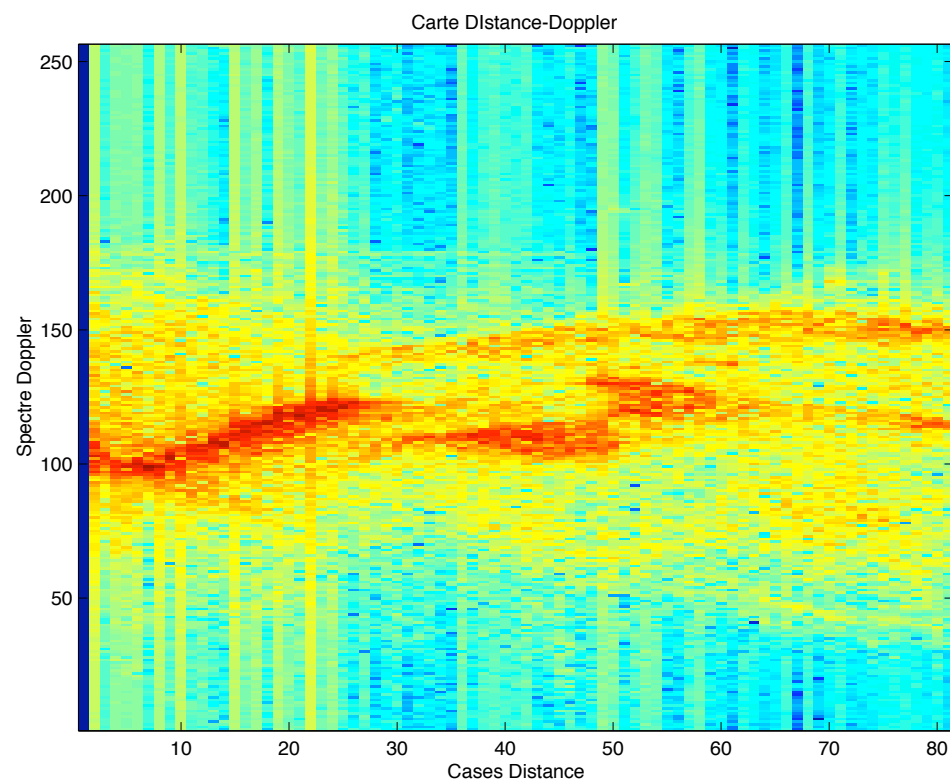
Deux luttes d'influence :

- **Les ondelettes continues pour l'analyse du signal :**
 - **Analyse de type temps-fréquence : fenêtre qui se translate et se contracte/dilate**
 - **Reconstruction possible mais redondance d'informations (base sur-abondante)**
- **Les ondelettes discrètes :**
 - **détermination de la meilleure base de décomposition (orthogonalité, régularité) en vue du codage, de la compression et de la reconstruction (notamment en images : JPEG4)**
 - **paramètre d'échelle a en puissance de deux, en p/q**

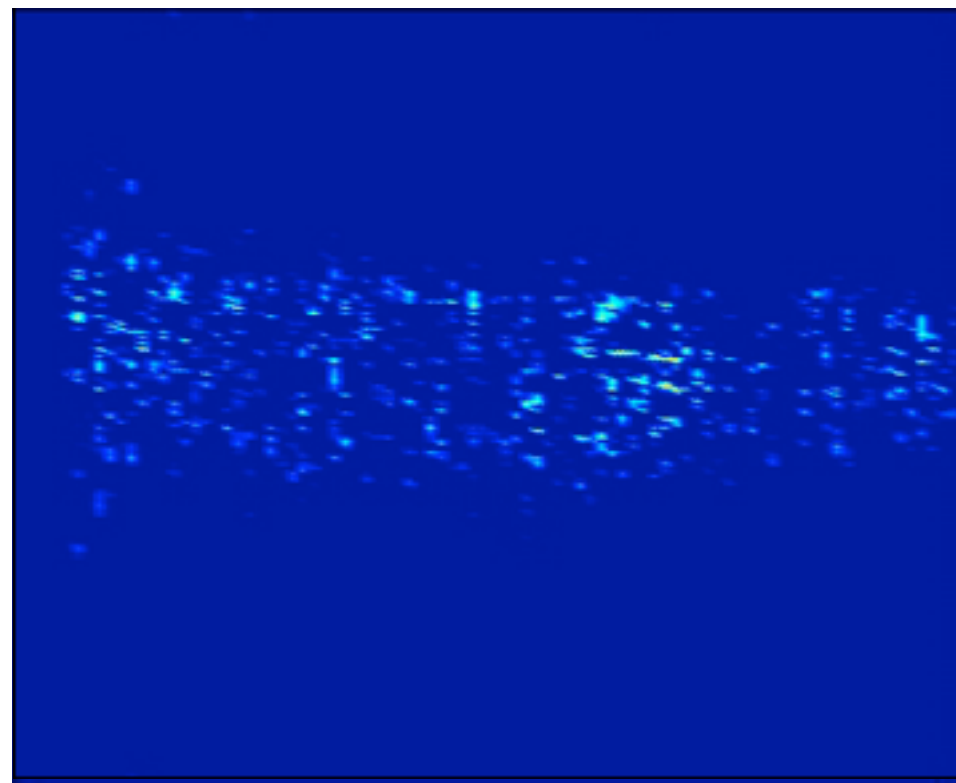
EXEMPLES SUR UN SIGNAL DE PAROLE



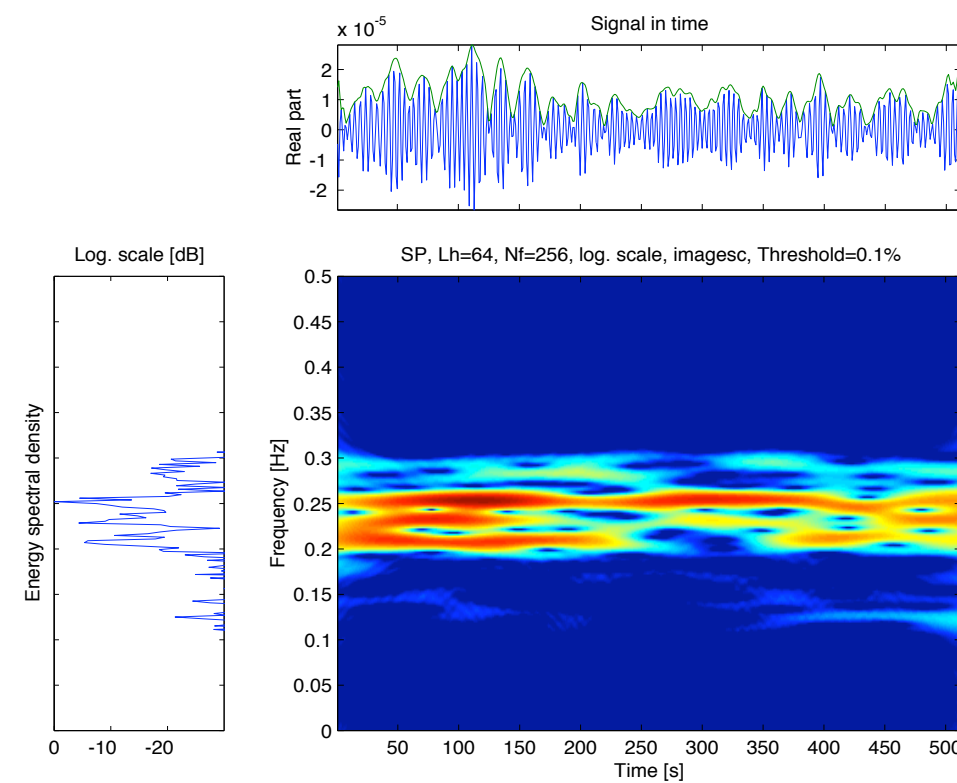
ANALYSE DE LA CONTAMINATION IONOSPHERIQUE SUR LE FOUILLIS EN HF (NOSTRADAMUS)



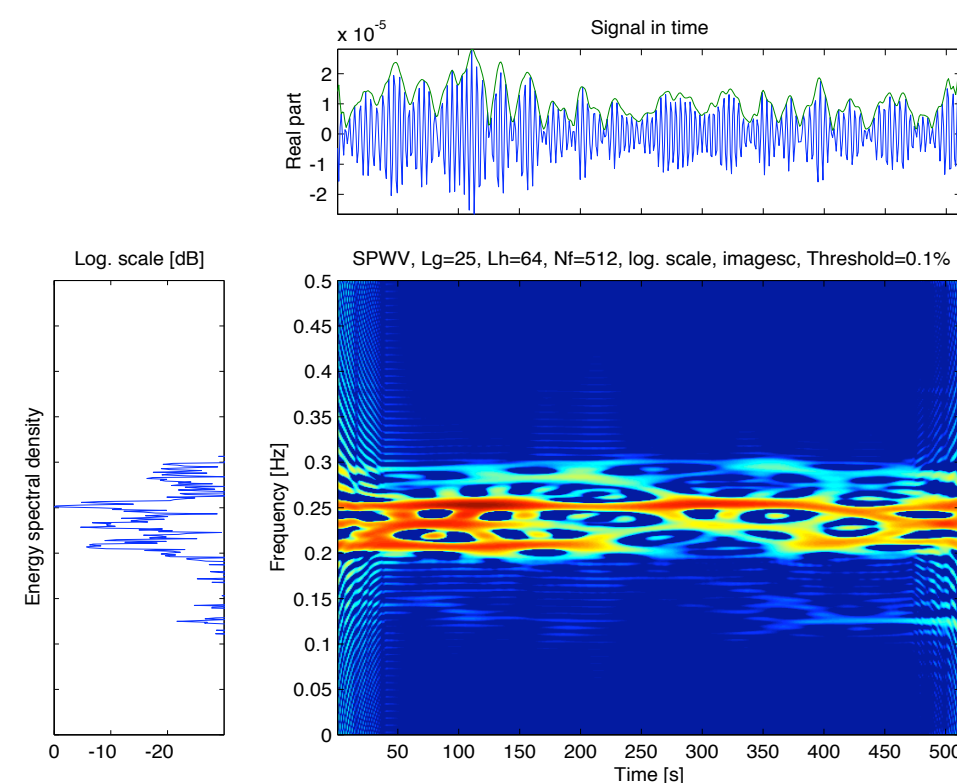
Carte Distance-Doppler



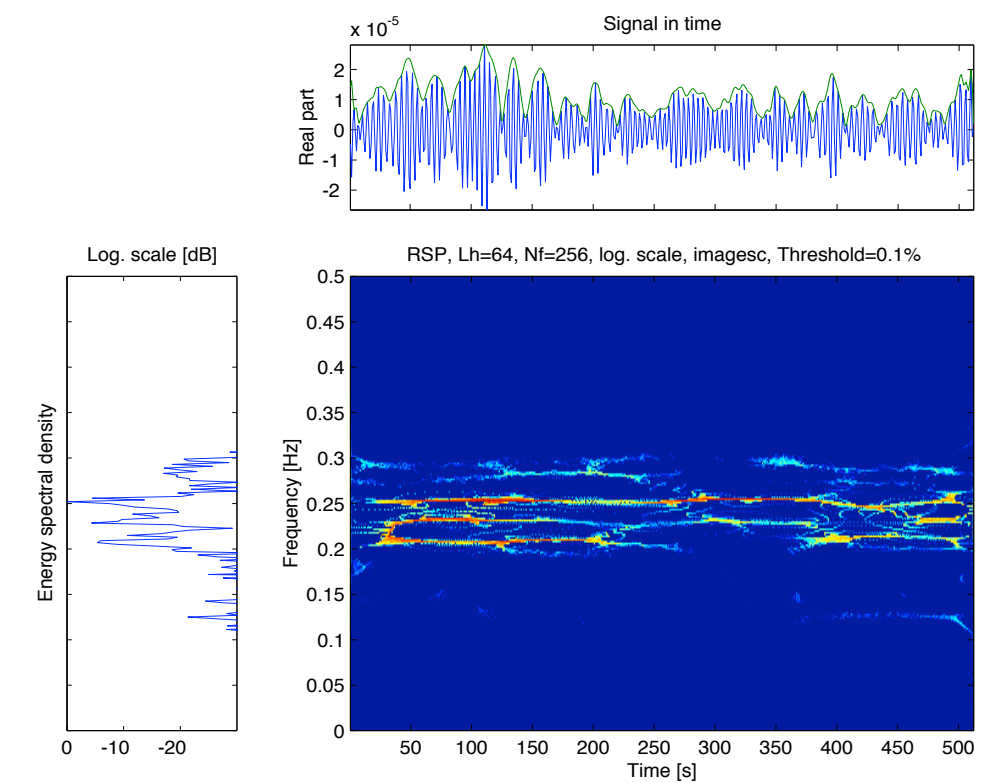
Evolution temporelle



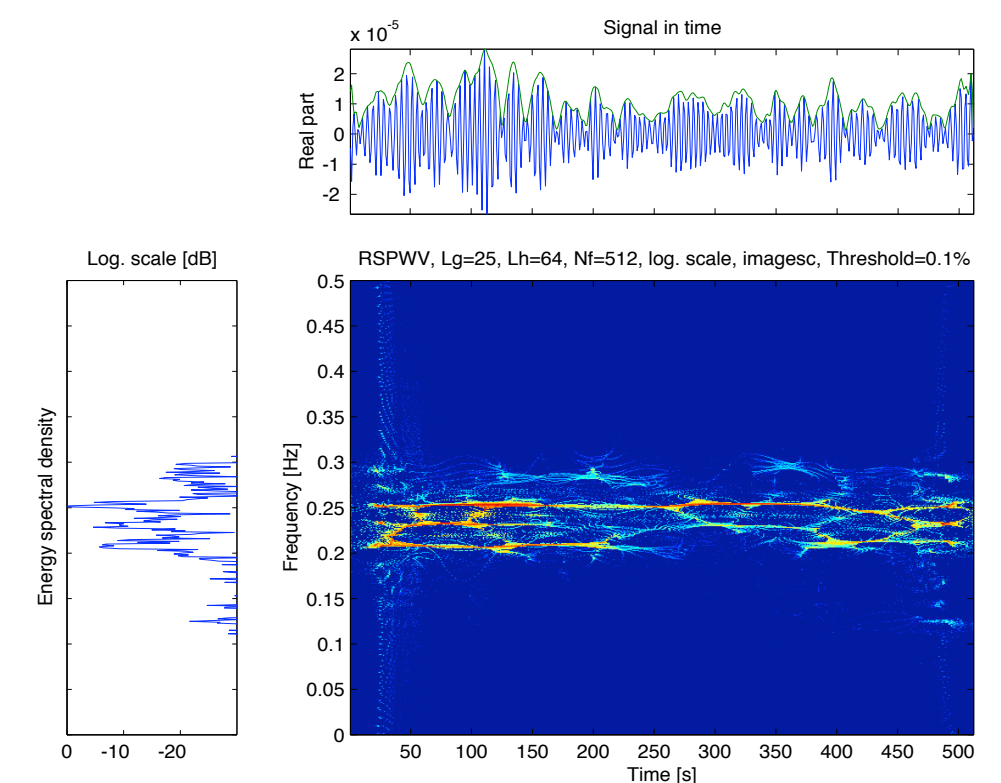
Spectrogramme (case 50)



Pseudo Wigner-Ville Lissée

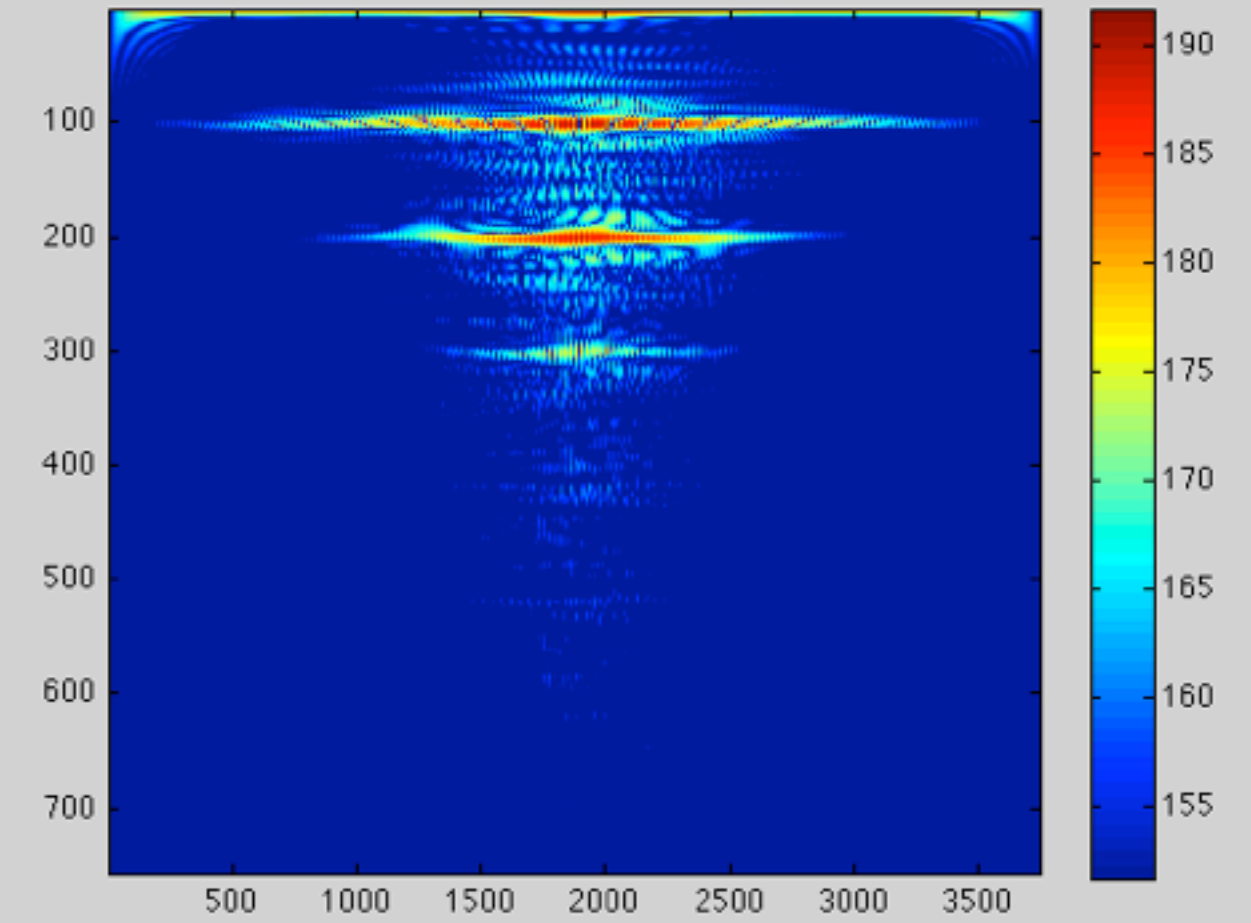
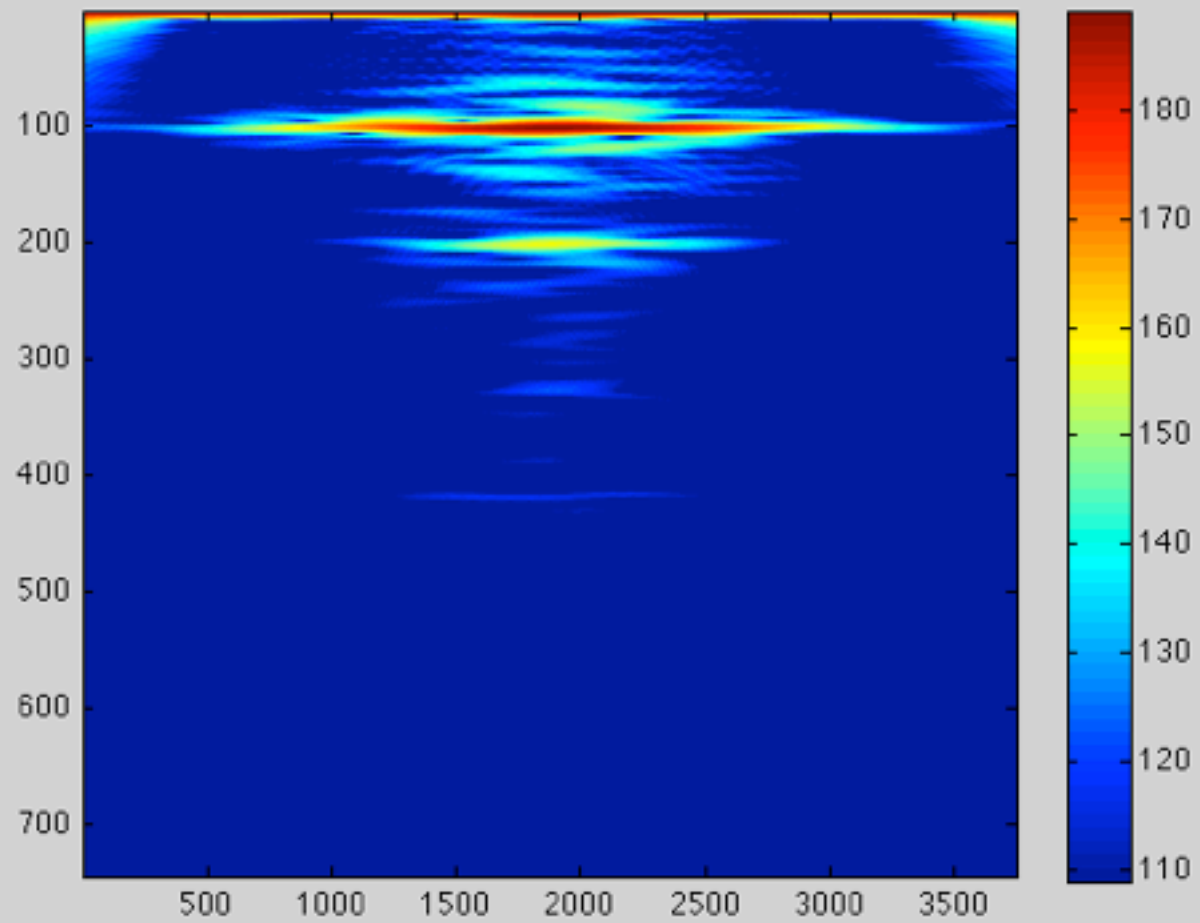
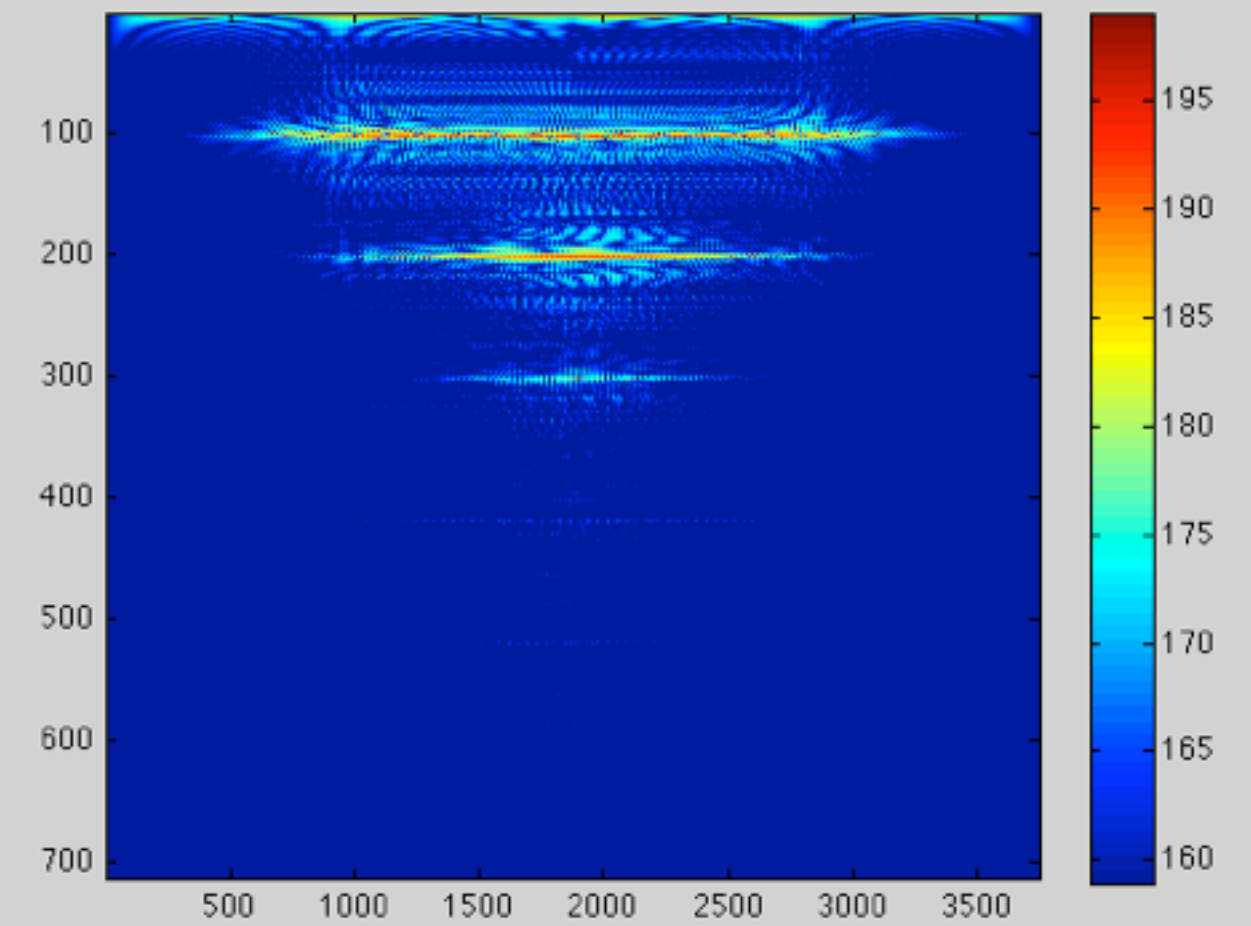
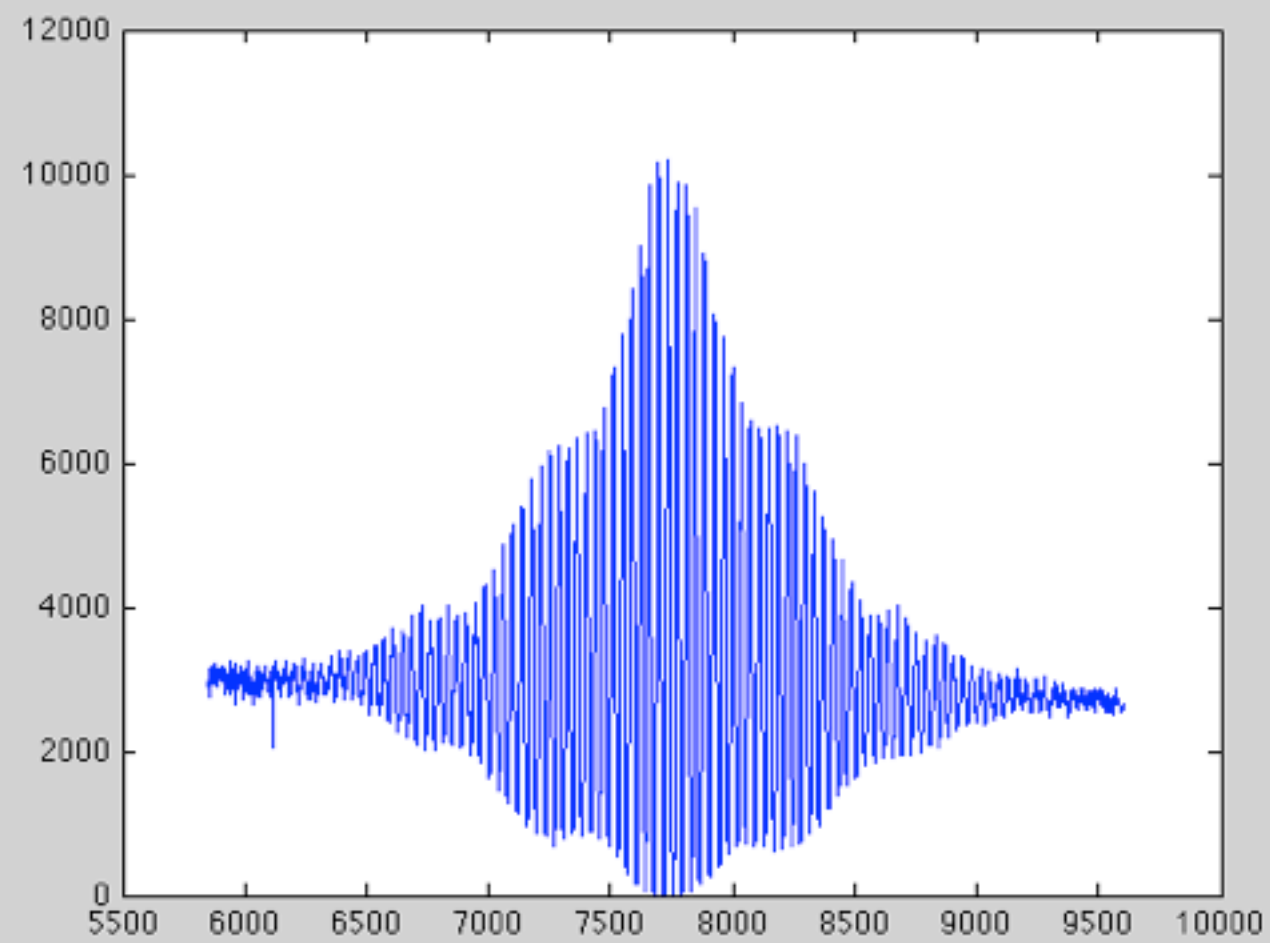


Spectrogramme réalloué (case 50)



Pseudo Wigner-Ville Lissée réallouée

EXEMPLE D'ANALYSE DE SIGNAL



CONCLUSIONS

- **L'analyse Temps-Fréquence permet d'accéder aux caractéristiques de phénomènes non-stationnaires et d'apporter une aide dans la compréhension de phénomènes physiques,**
- **Comme toute méthode d'analyse, elle comporte avantages et inconvénients,**
- **Présentée ici pour l'analyse de signaux à une dimension, elle peut se transposer pour l'analyse des signaux à plusieurs dimensions,**
- **L'analyse en ondelettes continues est un cas particulier de l'analyse temps-fréquence : elle ne diffère de l'analyse de Fourier à Court Terme que pour les signaux à large bande.**