

Sur la probabilité de fausse alarme du Filtre Adapté Normalisé pour la détection de cibles hors-grille

Pierre DEVELTER^{1,2}, Jonathan BOSSE¹, Olivier RABASTE¹, Philippe FORSTER³, Jean-Philippe OVARLEZ^{1,2}

¹DEMR, ONERA, Université Paris-Saclay, F-91120 Palaiseau, France

²SONDRA, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, F-91192 Gif-sur-Yvette, France

³Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, CNRS, SATIE, F-91190, Gif-sur-Yvette, France

pierre.develter@onera.fr, jonathan.bosse@onera.fr

olivier.rabaste@onera.fr, pforster@parisnanterre.fr, jean-philippe.ovarlez@onera.fr

Résumé – Les cibles *hors-grille* sont connues pour introduire une désadaptation du signal reçu vis à vis du signal théorique qui dégrade spectaculairement les performances du Filtre Adapté Normalisé. Pour éviter ce problème, les paramètres inconnus de la cible sont communément estimés avec une stratégie du Maximum de Vraisemblance qui résulte en un détecteur dit GLRT. La statistique de ce test sous l’hypothèse nulle est à notre connaissance inconnue dans la littérature courante pour le cas hors-grille. Cet article se propose de combler ce vide en proposant une telle expression sous bruit gaussien circulaire avec matrice de covariance connue, grâce à une approche géométrique.

Abstract – Off-grid targets are known to induce a mismatch that dramatically impacts the detection probability of the popular Normalized Matched Filter. To overcome this problem, the unknown target parameter is usually estimated through a Maximum Likelihood strategy resulting in a GLRT detection scheme. To the best of our knowledge, the test statistic for the null hypothesis is unknown in the off-grid scenario. This paper fills this gap by proposing such an expression under circular compound Gaussian noise with known covariance matrix thanks to a geometrical approach.

1 Introduction

Classiquement, la détection de signaux à paramètres inconnus est réalisée grâce à un test du Rapport de Vraisemblance Généralisé (GLRT) : les paramètres inconnus sont remplacés par leurs estimateurs au sens du maximum de vraisemblance (MV) dans le test du rapport de vraisemblance. Quand des expressions analytiques du MV ne sont pas disponibles pour les paramètres d’intérêt du signal, la plupart des stratégies de détection simplifient le problème en discrétisant l’espace des paramètres en une grille. Cependant, les vrais paramètres n’ont aucune raison de se trouver précisément sur la grille, puisqu’ils sont distribués continûment. Cela crée une désadaptation entre les paramètres sous test et les vrais paramètres de la cible, et détériore les performances en détection de la plupart des tests de l’état de l’art supposant les cibles sur-grille. Dans cet article, nous illustrons ce problème en contexte radar où les paramètres inconnus peuvent inclure le Doppler, le retard ou la direction d’arrivée.

L’impact du *hors-grille* est particulièrement spectaculaire pour des détecteurs comme le Filtre Adapté Normalisé (NMF) [1]. Ce test est utilisé sous hypothèse bruit Gaussien de niveau inconnu. Il est aussi beaucoup utilisé en contexte radar adaptatif sur signaux non Gaussiens, par exemple quand le bruit est distribué selon une distribution symétrique elliptique complexe (CES) [2]. Dans certains cas, la probabilité de détection peut

descendre à 0 même pour des hauts Rapports Signal sur Bruit (RSB) [3], en particulier à basses P_{FA} , usuelles en contexte radar.

Pour résoudre ce problème, la solution la plus évidente consiste à tester tout le support des paramètres continus, et pas juste la grille : c’est le vrai GLRT *hors-grille*. Cependant, à notre connaissance, l’expression analytique de la statistique de l’hypothèse nulle et sa P_{FA} est inconnue dans la littérature pour ce GLRT : puisqu’il s’agit du maximum d’un ensemble infini de v.a. non indépendantes, le résultat n’est pas trivial.

Quelques travaux proposent des solutions analytiques optimales pour d’autres types de désadaptation comme [4, 5], mais ils ne sont pas optimaux pour la désadaptation que nous considérons. D’autres approches incluent l’approximation du GLRT *hors-grille*, avec une approche par sous-espace [3] ou une méthode inspirée par l’écartométrie [6], par exemple. Ces solutions sont sous-optimales : elles sont conçues pour des situations pratiques où l’utilisation d’une approximation précise du GLRT est irréaliste car son manque de forme analytique peut mener à un coût de calcul élevé.

Dans cet article, nous obtenons une relation P_{FA} -seuil pour le NMF *hors-grille* grâce à une analyse géométrique du problème. Cette relation est valide pour de faibles P_{FA} d’intérêt dans des applications courantes en radar.

La section 2 présente le modèle du signal, le problème *hors-*

grille et la formulation du vrai GLRT. La section 3 présente le calcul de la relation P_{FA} -seuil. Dans la section 4, la validité du résultat présenté est vérifiée sur simulation numérique.

Notations : Les matrices sont en gras et en majuscules, les vecteurs en gras. Pour toute matrice \mathbf{A} ou vecteur, \mathbf{A}^T est la transposée de \mathbf{A} et \mathbf{A}^H est la transposée Hermitienne de \mathbf{A} . \mathbf{I} est la matrice identité et $\mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma})$ est la distribution normale complexe circulaire de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Gamma}$. S^{n-1} est la sphère unité dans \mathbb{R}^n . L'opérateur partie réelle d'un nombre complexe est dénoté par $\text{Re}(\cdot)$. L'opérateur \underline{u} est l'angle du nombre complexe u .

2 Formulation du problème

La mission principale d'un radar consiste à détecter la présence d'une cible d'amplitude complexe $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^N$ perturbée par du bruit additif \mathbf{n} . Ce problème peut être formalisé par un test d'hypothèse binaire :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{r} = \mathbf{n}, \\ H_1 : \mathbf{r} = \alpha \mathbf{d}(\theta) + \mathbf{n}, \end{cases} \quad (1)$$

où \mathbf{r} est le vecteur complexe de taille N du signal reçu échantillonné, α est l'amplitude complexe inconnue de la cible, et $\mathbf{d}(\theta)$ correspond à un *vecteur cible* généralement connu caractérisé par les paramètres inconnus de la cible (retard, Doppler ou angle). Dans la suite, nous supposons que \mathbf{n} est un vecteur de bruit Gaussien circulaire complexe centré de variance inconnue σ^2 i.e. $\mathbf{n} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{\Gamma})$. Les résultats restent valables pour toute distribution sphériquement invariante. Ce contexte est qualifié d'environnement Gaussien partiellement homogène. Sans perte de généralité, on suppose ici que θ est le décalage Doppler, scalaire, de la cible et nous investiguons uniquement le vecteur cible Doppler normalisé $\mathbf{d}(\theta)$:

$$\mathbf{d}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[1, e^{2i\pi\theta}, \dots, e^{2i\pi(N-1)\theta} \right]^T. \quad (2)$$

Ce modèle de vecteur cible est souvent rencontré en radar en problème de détection d'une cible après intégration du retard où plus généralement quand le problème consiste en l'estimation d'une sinusoïde complexe noyée dans du bruit.

On montre que pour σ supposé inconnu sous H_0 et α, σ supposés inconnus sous H_1 , avec θ supposé connu, le test GLRT correspondant est le filtre adapté normalisé (NMF) suivant [1] :

$$\frac{|\mathbf{d}(\theta)^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{r}|^2}{(\mathbf{d}(\theta)^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{d}(\theta)) (\mathbf{r}^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{r})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} w^2. \quad (3)$$

Ce test est aussi utilisé en radar adaptatif en contexte non Gaussien [2, 7], par exemple quand le bruit est distribué selon une distribution symétrique elliptique complexe (CES). Sa statistique, dans ce cas, est la même que dans le cas Gaussien. De manière équivalente, l'équation (3) peut être réécrite avec les vecteurs blanchis normalisés :

$$|\mathbf{s}(\theta)^H \mathbf{u}|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} w^2, \quad (4)$$

$$\text{où } \mathbf{s}(\theta) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}^{-1/2} \mathbf{d}(\theta)}{\|\boldsymbol{\Gamma}^{-1/2} \mathbf{d}(\theta)\|} \text{ et } \mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\Gamma}^{-1/2} \mathbf{r}}{\|\boldsymbol{\Gamma}^{-1/2} \mathbf{r}\|}.$$

La relation P_{FA} -seuil correspondante est connue :

$$P_{FA} = (1 - w^2)^{N-1}. \quad (5)$$

Quand le NMF est testé en un point θ différent du vrai paramètre θ_0 de la cible, on dit que la cible est *hors-grille*. Cela induit une désadaptation ($\theta \neq \theta_0$) entre le vrai vecteur cible de la cible $\mathbf{s}(\theta)$ et le vecteur cible $\mathbf{s}(\theta_0)$ sous test. Malheureusement, il a été montré dans [8] que le NMF est très sensible à une désadaptation du vecteur testé, ce qui peut potentiellement amener à une grave détérioration de la performance en détection : en particulier, pour une désadaptation plus grande que le seuil de détection, la probabilité de détection asymptotique tend vers 0 pour des RSB élevés : ce phénomène apparaît pour des P_{FA} aussi élevées que 10^{-3} dans la cellule de résolution de largeur $1/N$, car la réponse du NMF tombe en dessous du seuil en bord de cellule [3]. Pour corriger ce problème, on doit donc estimer θ .

Avec θ inconnu, la procédure naturelle du GLRT mène à

$$GLRT(\mathbf{u}, \mathcal{D}) = \max_{\theta \in \mathcal{D}} |\mathbf{s}(\theta)^H \mathbf{u}|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} w^2, \quad (6)$$

où \mathcal{D} est le domaine de recherche relativement au paramètre inconnu θ . Ce détecteur corrige le problème *hors-grille* du test (3). La relation P_{FA} -seuil analytique pour un tel détecteur est difficile à calculer de manière probabiliste car elle consiste à évaluer la statistique du maximum d'un ensemble continu de variables non-indépendantes, et elle n'a pas à notre connaissance été établie à ce jour dans la littérature courante en traitement du signal.

Dans la section suivante, nous montrons qu'il est possible d'obtenir cette relation en exploitant la géométrie du problème.

3 Une relation P_{FA} -seuil analytique avec une interprétation géométrique

Hotelling [9] a établi une méthodologie pour l'étude de tests statistiques sur la sphère réelle. Elle peut être utilisée pour évaluer la P_{FA} du GLRT dans le cas réel : cette approche est présentée en section 3.1. Cette approche ne peut pas être transposée directement dans le cas complexe de (4), et nous étudions une extension dans la section 3.2.

3.1 L'approche géométrique de Hotelling dans le cas réel

Dans cette section, nous étudions tout d'abord le cas réel. Notons que l'expression du NMF (4) a une interprétation géométrique simple. C'est en effet le cosinus carré de l'angle entre le vecteur cible $\mathbf{s}(\theta)$ et le signal reçu \mathbf{u} . Le seuil peut être vu comme le cosinus carré de l'angle $\cos^{-1} w$. Quand l'angle entre les vecteurs est sous cet angle limite, une cible est détectée. Par ailleurs, puisque \mathbf{u} a été blanchi, il est uniformément

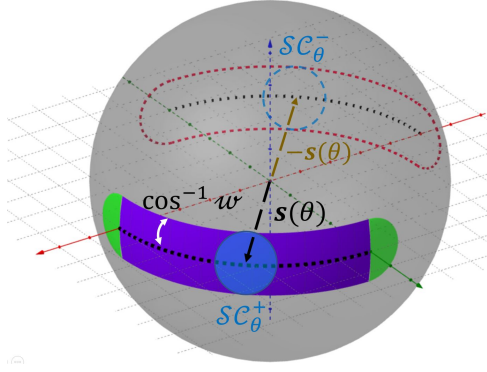


FIGURE 1 – \mathcal{T} plongé sur la sphère unité S^2 dans \mathbb{R}^3 composé d'un tube (en violet) autour d'une variété à une dimension $\bigcup_{\theta \in \mathcal{D}} \mathbf{s}(\theta)$, deux calottes demi-sphériques (en vert) et leurs opposés dont le contour est en pointillés. SC_θ est dessiné en bleu.

distribué sur la N -sphère unité sous l'hypothèse nulle.

Grâce à cette distribution, on peut calculer la P_{FA} du test NMF donné par l'équation (4). Considérons la calotte sphérique SC_θ^+ définie par les vecteurs \mathbf{u} sur la sphère unité vérifiant $\mathbf{u}^T \mathbf{s}(\theta) < w$ et sa version symétrique SC_θ^- satisfaisant $-\mathbf{u}^T \mathbf{s}(\theta) < w$. Définissons $SC_\theta = SC_\theta^+ \cup SC_\theta^-$ comme l'union des deux calottes précédentes. On a une fausse alarme dès que $\mathbf{u} \in SC_\theta$. En conséquence, la P_{FA} est le rapport de la surface des calottes sphériques sur la surface de la sphère unité.

Considérons le GLRT dans l'équation (6). Une fausse alarme survient quand $\mathbf{u} \in \mathcal{T} = \bigcup_{\theta \in \mathcal{D}} SC_\theta$. Alors la P_{FA} est le rapport entre la surface de \mathcal{T} et la surface de la sphère unité. Un exemple dans \mathbb{R}^3 est représenté en figure 1 sur S^2 . \mathcal{T} est l'union de deux tubes symétriques plongés dans la sphère, de rayon géodésique $\cos^{-1} w$ autour des deux courbes $\mathbf{s}(\theta)$ et $-\mathbf{s}(\theta)$ avec des demi-calottes sphériques ajoutées aux extrémités.

Calculer la P_{FA} revient à trouver la surface de l'ensemble des points dans S^{N-1} qui sont à la distance Euclidienne donnée par $\sqrt{2(1-w)}$ des courbes.

Dans [9], Hotelling établit une formule pour la surface des tubes sur la sphère réelle à n dimensions S^{n-1} .

3.2 Extension de l'approche d'Hotelling au cas complexe

Malheureusement le résultat d'Hotelling n'est pas directement applicable au GLRT considéré. Comme nous allons le voir, quand on transpose notre problème complexe dans \mathbb{R}^{2N} la variété résultante est alors à deux dimensions, car la valeur absolue dans le terme droit du GLRT donné en équation (6) implique alors une recherche du maximum de la phase.

En effet, pour n'importe quel scalaire réel $\alpha \in [0, 2\pi]$, remarquons que $\text{Re}(\mathbf{s}(\theta)^H \mathbf{u} e^{-i\alpha}) \leq |\mathbf{s}(\theta)^H \mathbf{u}|$, ces deux quan-

tités étant égales pour $\alpha = \angle \mathbf{s}(\theta)^H \mathbf{u}$. On trouve alors, en décomposant $\mathbf{s}(\theta) = \mathbf{s}_r(\theta) + i\mathbf{s}_i(\theta)$ et $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + i\mathbf{u}_i$ en parties réelles et complexes :

$$\begin{aligned} \text{Re}(\mathbf{s}(\theta)^H \mathbf{u} e^{-i\alpha}) &= (\mathbf{s}_r(\theta)^T \mathbf{u}_r + \mathbf{s}_i(\theta)^T \mathbf{u}_i) \cos \alpha \\ &= (\boldsymbol{\gamma}_1(\theta)^T \underline{\mathbf{u}}) \cos \alpha + (\boldsymbol{\gamma}_2(\theta)^T \underline{\mathbf{u}}) \sin \alpha, \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\gamma}_1(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_r(\theta) \\ \mathbf{s}_i(\theta) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_2(\theta) = \begin{bmatrix} -\mathbf{s}_i(\theta) \\ \mathbf{s}_r(\theta) \end{bmatrix}$ et $\underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix}$ est un vecteur de bruit réel de dimension $2N$ tiré uniformément sur S^{2N-1} sous H_0 . Le GLRT (6) peut alors être écrit comme :

$$\max_{\alpha, \theta} [(\boldsymbol{\gamma}_1(\theta)^T \underline{\mathbf{u}}) \cos \alpha + (\boldsymbol{\gamma}_2(\theta)^T \underline{\mathbf{u}}) \sin \alpha] \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\geq}} w. \quad (7)$$

La nature bi-dimensionnelle de la variété réelle à inspecter est directement apparente avec cette formulation : en notant $\gamma(\alpha, \theta) = \boldsymbol{\gamma}_1(\theta) \cos \alpha + \boldsymbol{\gamma}_2(\theta) \sin \alpha$, la région d'acceptation dans le cas complexe est un nouveau tube \mathcal{T} autour de la variété à deux dimensions $\gamma(\theta, \alpha)$.

Le résultat d'Hotelling ne couvre pas ce type de variété puisqu'il ne donne la surface d'un tube qu'autour d'une courbe. Cependant, dans [10], ce résultat est étendu au cas spécial de variété bi-dimensionnelles d'intérêt pour nous.

Théorème 3.1 [10] *Pour $i \in [1, 2]$, soit $\gamma_i : [0, t_0] \rightarrow S^{n-1}$ des courbes régulières. Supposons $\boldsymbol{\gamma}_1(t)^T \boldsymbol{\gamma}_2(t) = 0$ pour tout t . Soit $Z(t) = [(\boldsymbol{\gamma}_1(t)^T \underline{\mathbf{u}})^2 + (\boldsymbol{\gamma}_2(t)^T \underline{\mathbf{u}})^2]^{1/2}$ où $\underline{\mathbf{u}}$ est distribué uniformément sur S^{n-1} . Alors pour $0 < w < 1$:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{0 \leq t \leq t_0} Z(t) > w \right) &\leq (1-w^2)^{(n-2)/2} + \\ &\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) w (1-w^2)^{(n-3)/2}}{2\pi^{3/2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \times \\ &\int_0^{t_0} \int_0^{2\pi} \left[\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_1(t) \cos \omega + \dot{\boldsymbol{\gamma}}_2(t) \sin \omega\|^2 - \right. \\ &\left. (\dot{\boldsymbol{\gamma}}_1(t)^T \boldsymbol{\gamma}_2(t))^2 \right]^{1/2} d\omega dt, \quad (8) \end{aligned}$$

où $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_i(t)$ est la dérivée de $\boldsymbol{\gamma}_i(t)$ par rapport à t . Quand il n'y a pas de recouvrement, cette inégalité devient une égalité (par recouvrement, on entend une intersection non nulle des sections droites de la variété dans les régions de décisions de l'hypothèse H_1 sur S^{n-1}).

Il apparaît que nous pouvons reformuler le problème de manière à remplir les conditions du théorème. Avec nos notations, on peut vérifier que

$$|\mathbf{s}(\theta)^H \mathbf{u}|^2 = |\boldsymbol{\gamma}_1(\theta)^T \underline{\mathbf{u}}|^2 + |\boldsymbol{\gamma}_2(\theta)^T \underline{\mathbf{u}}|^2, \quad (9)$$

de sorte que le théorème nous donne la P_{FA} désirée (quand il y a égalité). On obtient alors notre résultat principal :

Corollaire 3.1.1 *En l'absence de recouvrement (régimes à faibles P_{FA}), la P_{FA} du GLRT (6) pour un domaine de recherche $\mathcal{D} = [\theta_1, \theta_2]$ avec le vecteur cible $\mathbf{d}(\theta)$ défini par (2) est donnée par l'équation (8).*

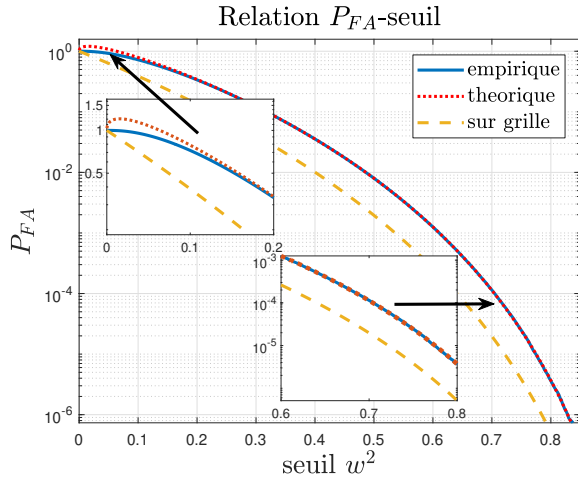


FIGURE 2 – Comparaison entre la relation P_{FA} -seuil théorique de l'équation (10) et la relation P_{FA} -seuil empirique pour $N = 10$. La relation *hors-grille* (5) est aussi tracée à des fins de comparaison. Tests pour $\theta \in [0, 1/N]$.

— Sous l'hypothèse d'un bruit blanc ($\Gamma = \sigma^2 \mathbf{I}$), cette équation se simplifie en :

$$P_{FA} = (1 - w^2)^{N-1} + \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{\Gamma(N) w (1 - w^2)^{N-\frac{3}{2}}}{\Gamma(N - \frac{1}{2})} (N^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (\theta_2 - \theta_1). \quad (10)$$

— Sous l'hypothèse d'un bruit coloré ($\Gamma \neq \sigma^2 \mathbf{I}$), (8) peut être évaluée numériquement.

Le premier terme dans (10) représente la surface des deux calottes sphériques aux extrémités du tube. Ainsi, il est égal à la P_{FA} connue du NMF exprimée en équation (5). Le second terme montre l'influence de la variété induite par la nature *hors-grille* du problème.

4 Résultats numériques

Vérifions la validité de la formule (10). La figure 2 présente la relation P_{FA} -seuil donnée dans l'équation (10) et les seuils calculés numériquement en utilisant 10^8 échantillons de bruit blanc Gaussien pour un vecteur cible de taille $N = 10$. La recherche continue sur le domaine \mathcal{D} est remplacée par une recherche discrète en suréchantillonnant la case d'un facteur 30, où $\mathcal{D} = [0, 1/N]$ est une des cellules de résolution usuelle de Fourier.

La formule correspond parfaitement quand la P_{FA} est assez faible (c'est à dire quand le seuil est assez haut). La formule n'est pas valide quand la P_{FA} est proche de 1 à cause de phénomènes de recouvrement de surface (sa valeur dépasse même 1). Cependant, des P_{FA} aussi élevées n'ont pas d'intérêt pratiques pour les applications les plus communes en radar. Une analyse du phénomène de recouvrement sera donnée dans un prochain article.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons répondu au problème de la détection *hors-grille* en utilisant le NMF-GLRT en élaborant une relation P_{FA} -seuil analytique, valide pour la plupart des applications usuelles notamment en radar. Dans de futurs travaux, nous chercherons mathématiquement les conditions garantissant qu'il n'y a pas de recouvrement pour une P_{FA} donnée pour fournir un domaine et des conditions de validité précises.

Références

- [1] L. L. Scharf and D. W. Lytle, "Signal detection in Gaussian noise of unknown level : an invariance application," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 17, pp. 404–411, July 1971.
- [2] F. Pascal, J.-P. Ovarlez, P. Forster, and P. Larzabal, "On a SIRV-CFAR detector with radar experimentations in impulsive noise," in *European Signal Processing Conference, EUSIPCO'06*, Florence, Italy, September 2006.
- [3] O. Rabaste, J. Bosse, and J.-P. Ovarlez, "Off-grid target detection with Normalized Matched Subspace Filter," in *24th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, aug 2016, pp. 1926–1930.
- [4] O. Besson, "Detection of a signal in linear subspace with bounded mismatch," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 42, no. 3, pp. 1131–1139, 2006.
- [5] A. De Maio, Y. Huang, D. P. Palomar, S. Zhang, and A. Farina, "Fractional QCQP with applications in ML steering direction estimation for radar detection," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 59, no. 1, pp. 172–185, 2010.
- [6] P. Develter, J. Bosse, O. Rabaste, P. Forster, and J.-P. Ovarlez, "Off-grid radar target detection with the normalized matched filter : A monopulse-based detection scheme," in *2021 IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP)*. IEEE, 2021, pp. 226–230.
- [7] E. Conte, M. Lops, and G. Ricci, "Asymptotically optimum radar detection in compound-Gaussian clutter," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 31, no. 2, pp. 617–625, April 1995.
- [8] O. Rabaste and N. Trouvé, "Geometrical design of radar detectors in moderately impulsive noise," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 50, no. 3, pp. 1938–1954, 2014.
- [9] H. Hotelling, "Tubes and spheres in n -spaces, and a class of statistical problems," *American Journal of Mathematics*, vol. 61, no. 2, pp. 440–460, 1939.
- [10] I. Johnstone and D. Siegmund, "On Hotelling's formula for the volume of tubes and Naiman's inequality," *The Annals of Statistics*, pp. 184–194, 1989.