

APPLICATION DE LA TRANSFORMATION DE MELLIN EN THEORIE DU RADAR LARGE BANDE*

Jean-Philippe Ovarlez

ONERA DES, BP72, 92322 Chatillon, France

RESUME

Si tous les aspects de la détection et de l'estimation, ainsi que tous les aspects de la mise en œuvre d'un récepteur radar sont maintenant parfaitement connus lorsque les hypothèses de Woodward sont vérifiées, il n'en reste pas moins une certaine méconnaissance lorsqu'on sort de ce cadre. On se propose dans cet article de poser les nouveaux problèmes qui interviennent lors du passage de la bande étroite à la bande large et d'en résoudre certains. Le problème délicat que l'on rencontre dans ce cas est celui du traitement du facteur de compression Doppler. C'est pourquoi une transformation originale, la Transformation de Mellin, invariante aux changements d'échelle et parfaitement adaptée aux calculs de formes large bande, est alors naturellement introduite. Son utilisation permet de développer des algorithmes rapides de calcul de fonctions d'ambiguïté large bande, de donner de nouveaux résultats théoriques sur les bornes de Cramer-Rao dans l'estimation large bande de vitesse, mais aussi d'élaborer de nouvelles méthodes de synthèse de formes d'onde large bande.

1. DETECTION ET ESTIMATION EN THEORIE DU RADAR

1.1 Introduction

Considérons l'émission d'un signal $z(t)$ (analytique) sur une cible en mouvement. Le signal reçu par le radar peut être modélisé comme :

$$x(t, \underline{\alpha}_0) = T_{\underline{\alpha}_0} z(t) + b(t) \quad (1)$$

où $T_{\underline{\alpha}_0}$ est une certaine transformation agissant sur le signal $z(t)$ avec un jeu de paramètres inconnus $\underline{\alpha}_0$ (déphasage, atténuation, retard, décalage de fréquence ou compression Doppler). Le terme additif $b(t)$ caractérise un bruit à priori quelconque.

La théorie de la détection définit alors la manière de prendre une décision (cible présente ou non) face à plusieurs hypothèses bien déterminées. Cette décision est fonction d'un critère adapté au problème traité (critère de Bayes, critère de Neymann Pearson). Le processus qui optimise ce critère de décision définit le récepteur optimal. La théorie de l'estimation consiste, quant à elle, à déterminer de la manière la plus précise possible des paramètres inconnus spécifiques du signal analysé.

En présence de bruit blanc gaussien (moyenne nulle, variance σ^2), on peut montrer [1] que les deux critères cités plus haut conduisent tous deux à définir le détecteur optimal comme la comparaison du logarithme d'une certaine

ABSTRACT

If all the problems concerning the detection, estimation or development of the matched filter in narrowband radar or sonar theory are now perfectly known, there is a certain misreading when considering broadband problems. We propose in this communication to briefly describe and solve these new problems, especially the dilation factor processing. An original transform which is invariant by scale change and which is well suited to the computation of expressions involving stretched forms of the signal is therefore introduced. The use of this new transform allows to develop fast broadband ambiguity functions algorithms, to give new theoretical results about broadband computation of Cramer Rao bounds for velocity estimation in the broad band case, and to propose new methods for radar or sonar waveforms synthesis.

quantité Λ , appelée rapport de vraisemblance, à un seuil $\ln \Lambda_0$ bien défini.

$$\ln \Lambda = \frac{1}{\sigma^2} \left[2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t, \underline{\alpha}_0) T_{\underline{\alpha}}^* z(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} |T_{\underline{\alpha}} z(t)|^2 dt \right] \quad (2)$$

Si la valeur de $\ln \Lambda$ est supérieure à $\ln \Lambda_0$, alors il y a détection. Dans ce cas, il est souvent nécessaire d'accéder aux paramètres de la cible (vitesse, position radiale, position angulaire, etc...). On détermine alors ces paramètres en maximisant le logarithme du rapport de vraisemblance par rapport aux paramètres à estimer. C'est le critère du maximum de vraisemblance bien connu en radar, qui consiste à maximiser une probabilité conditionnelle à priori.

Considérons maintenant le cas particulier où le signal reçu $x(t, \underline{\alpha})$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$x(t, \underline{\alpha}_0) = A_0 T_{\underline{\theta}_0} z(t) e^{i\phi_0} + b(t) \quad (3)$$

où $\underline{\alpha}_0 = (A_0, \phi_0, \underline{\theta}_0)$ et où $T_{\underline{\theta}_0}$ est une sous transformation agissant sur le signal $z(t)$ avec un jeu de paramètres inconnus $\underline{\theta}_0$ (retard, décalage de fréquence ou compression Doppler). Le paramètre A_0 caractérise l'amplitude du signal écho, ϕ_0 un changement de phase et $b(t)$ un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 . Lorsque les densités de probabilité des paramètres A_0 et ϕ_0 sont inconnues, ce qui est souvent le cas, la statistique Λ à maximiser, d'après la théorie de l'estimation au sens du Maximum de Vraisemblance, est donnée par le carré du module du produit scalaire entre le signal reçu $x(t, \underline{\alpha}_0)$ et une certaine réplique $T_{\underline{\theta}} z(t)$ du signal émis adaptée à un jeu de paramètres particuliers $\underline{\theta}$.

*Colloque SEE "Méthodes Modernes de Traitement de Signal en Radar et Sonar", ENST, 8 Avril 1993, Paris

On peut montrer que la théorie du filtre optimal, qui consiste à déterminer le filtre qui maximise le rapport signal à bruit, conduit de même, en présence de bruit blanc, au calcul de cette même quantité, appelée sortie du filtre adapté.

$$\Lambda(\underline{\alpha}_0, \underline{\theta}) = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t, \underline{\alpha}_0) T_{\underline{\theta}}^* z(t) dt \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |T_{\underline{\theta}} z(t)|^2 dt} \quad (4)$$

Lorsque le rapport signal à bruit est élevé ou qu'il n'y a pas de bruit additif, ce produit scalaire, plus connu sous le nom de fonction d'ambiguïté du signal, est maximal pour un jeu de paramètres $\underline{\theta}$ égal à celui de la cible $\underline{\theta}_0$. Il suffit alors de déterminer le maximum de cette fonction pour accéder directement aux paramètres cherchés.

Il est clair que la qualité de ce genre d'estimation n'est pas parfaite et il convient alors de pouvoir quantifier l'erreur d'estimation commise sur les paramètres. La qualité d'un estimateur $\hat{\theta}_i$ est généralement mesurée par sa variance $Var(\theta_i - \hat{\theta}_i)$. Pour un estimateur non biaisé ($E(\hat{\theta}_i) = \theta_i$), cette variance possède une borne minimale donnée par les bornes de Cramer-Rao [1]. Les bornes de Cramer-Rao sont explicitées en inversant une matrice dite *Matrice d'Information de Fisher* définie par :

$$J_{i,j} = \left(-E \left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \right)_{i,j} \quad (5)$$

où θ_i représente chaque composantes du vecteur $\underline{\theta}$.

1.2. La Fonction d'Ambiguïté

La fonction d'ambiguïté est donc une fonction de discrimination entre un signal et sa transformée par un opérateur $T_{\underline{\theta}}$ de paramètres inconnus $\underline{\theta}$ (translation de temps, de fréquence, compression, etc...). Elle possède un nombre de variables égal à celui des paramètres de l'opérateur, et est maximale pour des valeurs rendant invariante la transformation. L'étude de la variation de cette fonction autour du maximum pour diverses valeurs de paramètres de l'opérateur permet de déterminer le niveau de ressemblance qui peut exister entre les deux signaux.

La fonction d'ambiguïté joue un rôle important dans beaucoup de domaines tels que le radar ou le sonar (détection de cibles [2], estimation des paramètres liés aux cibles, synthèse de codes [3] ayant des performances données (lobes secondaires réduits, grande résolution, etc..), évaluation du pouvoir de résolution de codes radar [4]).

1.2.1. La fonction d'ambiguïté bande étroite

La fonction d'ambiguïté bande étroite, telle qu'on la rencontre en théorie du radar ou du sonar, est construite sur le signal analytique $z(t)$ ou sur sa transformée de Fourier $Z(f)$. Supposons qu'une cible située à une distance R_0 et animée d'une vitesse radiale v_0 soit illuminée par un signal $z(t)$ caractérisé par une largeur de bande B , une fréquence porteuse f_0 et une durée T . Sous les hypothèses simplificatrices de Woodward [5] énoncées ci-dessous,

- vitesse relative des cibles v_0 négligeable devant la célérité c dans le milieu de propagation
- signal bande étroite $B \ll f_0$

$$- BT \ll \frac{c}{2v_0}$$

la fonction d'ambiguïté prend alors les deux formes équivalentes possibles suivantes :

$$X(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) z^*(t - \tau) e^{-2i\pi\nu t} dt \quad (6)$$

$$= \int_0^{+\infty} Z(f) Z^*(f - \nu) e^{2i\pi f \tau} df \quad (7)$$

où $\nu = 2(v - v_0)f_0/c$ est la différence entre la fréquence Doppler du signal reçu et la fréquence Doppler du signal réplique et $\tau = 2(R - R_0)/c$ est la différence des retards entre signal reçu et la réplique. Il est clair que cette fonction est maximale pour le couple de paramètres ($\nu = 0, \tau = 0$) qui correspond au jeu de paramètres (R, v) cherchés.

La plupart des algorithmes rapides qui permettent de calculer numériquement ces formes bande-étroite sont tous basés sur l'algorithme rapide bien connu de Transformation de Fourier Discrète comme, par exemple, l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (FFT en anglais). La simplicité d'emploi de ce dernier ainsi que sa souplesse de mise en œuvre dans des circuits spécialisés ont conduit la majorité des traitements radar ou sonar basés sur le filtrage adapté bande étroite à l'adopter.

1.2.2. La fonction d'ambiguïté large bande

Lorsque l'une des hypothèses de Woodward n'est pas respectée, il est nécessaire de considérer la fonction d'ambiguïté dite large bande [6, 7] ou encore généralisée, sous peine de dégrader les performances du système (très forte atténuation du maximum de la sortie de filtre adapté, dégradation de la largeur des pics principaux, etc...). Les deux formes équivalentes qui la caractérisent sont données par :

$$X(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) z^*\left(\frac{t}{a} - b\right) dt \quad (8)$$

$$= \sqrt{a} \int_0^{+\infty} Z(f) Z^*(af) e^{2i\pi abf} df \quad (9)$$

où $a = (c - v_0)/(c + v_0)$ est le facteur de compression Doppler et $b = 2R_0/(c - v_0)$ est le retard.

L'utilisation de méthodes traditionnelles (technique d'intégration, transformation de Fourier, etc...) pour calculer la fonction d'ambiguïté (ou encore la sortie d'un filtre adapté radar) à partir des deux expressions (8) ou (9) nécessite un volume de calcul très important. Ceci s'explique par le fait que ces quantités sont des formes intégrales très délicates à expliciter analytiquement, et que, même numériquement, on se heurte à deux difficultés :

- nécessité de transformer un signal échantillonné en une version dilatée ou compressée (utilisation d'interpolations, de sur-échantillonnage, etc..).
- temps de calcul très important associé au volume d'opérations à effectuer.

Une alternative intéressante consiste à utiliser le principe de la phase stationnaire [8], mais le résultat, qui n'est valide que sous certaines hypothèses (signaux asymptotiques, etc...) et qui n'est pas très simple à mettre en œuvre dans une chaîne radar, ne donne enfin qu'une forme approximée.

Au paragraphe 3 sera développée une nouvelle approche de calcul sous la forme d'un algorithme rapide qui, sans approximation ni interpolation, permet d'obtenir un résultat exact. Cet algorithme est fondé sur la transformation de Mellin [9, 10] qui s'est révélée particulièrement adaptée au calcul numérique ou analytique de formes large bande contenant des dilatations (imagerie par transformée d'ondelette [11, 12], représentations temps-fréquence affines et sa régularisée [13, 14]).

1.3. Qualité des estimateurs retard-vitesse

1.3.1. Le Cas Bande Etroite

Sous les hypothèses de Woodward [5], l'effet Doppler peut être approximé par un simple décalage de fréquence sur le signal $z(t)$. Ainsi, le signal écho $x(t, \underline{\alpha}_0)$ peut être mis sous la forme :

$$x(t, \underline{\alpha}_0) = A_0 z(t - \tau) e^{2i\pi\nu t} e^{i\phi_0} + b(t) \quad (10)$$

où $\nu = 2v_0 f_0/c$ est le décalage Doppler et τ le retard de propagation (position radiale $R_0 = c\tau/2$). Dans ce cas, la Matrice d'Information de Fisher (5) est aisément calculable et conduit à

$$J = \frac{4\pi^2 A_0^2}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \sigma_f^2 & f_0 t_0 - m \\ f_0 t_0 - m & \sigma_t^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

où les moments du premier ordre f_0 et t_0 représentent la fréquence centrale et l'époque moyenne et où ceux du second ordre, σ_f et σ_t , représentent la largeur de bande et la durée du signal.

$$f_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f |Z(f)|^2 df \quad (12)$$

$$t_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} t |z(t)|^2 dt \quad (13)$$

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0)^2 |z(t)|^2 dt \quad (14)$$

$$\sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_0)^2 |Z(f)|^2 df \quad (15)$$

Le paramètre noté m définit l'indice de modulation du signal

$$m = -\frac{1}{2\pi} \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} t z(t) \frac{dz^*}{dt} dt \quad (16)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \text{Im} \int_0^{+\infty} f Z(f) \frac{dZ}{df}(f) df \quad (17)$$

Chaque valeur des bornes minimales de la variance des estimateurs est obtenue en inversant la matrice (11), ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} E[(\nu - \hat{\nu})^2] &= \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{\sigma_f^2}{\sigma_t^2 \sigma_f^2 - (m - f_0 t_0)^2} \\ &\geq \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{1}{\sigma_t^2} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} E[(\tau - \hat{\tau})^2] &= \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2 \sigma_f^2 - (m - f_0 t_0)^2} \\ &\geq \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{1}{\sigma_f^2} \end{aligned} \quad (19)$$

La matrice de Fisher définie d'après la statistique Λ du maximum de vraisemblance est identique à la matrice constituée des différentes dérivées partielles du carré du module de la fonction d'ambiguïté évaluées au voisinage de l'origine. Elle est donnée par :

$$J = -\frac{A_0^2}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 |X|^2}{\partial \tau^2} & \frac{\partial^2 |X|^2}{\partial \tau \partial \nu} \\ \frac{\partial^2 |X|^2}{\partial \tau \partial \nu} & \frac{\partial^2 |X|^2}{\partial \nu^2} \end{pmatrix} \quad (20)$$

où $X(\tau, \nu)$ représente la fonction d'ambiguïté (7) bande étroite du signal.

Ces résultats bien connus prouvent qu'en théorie du radar, les signaux optimaux sont donnés par des codes qui réalisent à la fois un bon comportement en résolution radiale (grande largeur de bande σ_f) ainsi qu'en vitesse (grande durée σ_t). Ce sont les signaux à grand produit bande durée BT . Leurs fonctions d'autocorrélation en retard $C_1(\tau)$ et en vitesse $C_2(\nu)$ données par les quantités suivantes :

$$C_1(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(f)|^2 e^{2i\pi f \tau} df \quad (21)$$

$$C_2(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2 e^{-2i\pi \nu t} dt \quad (22)$$

doivent être chacune caractérisées par un pic principal très étroit (de largeur respective $1/\sigma_f$ et $1/\sigma_t$) et par des lobes secondaires très faibles.

1.3.2. Le Cas Large Bande

Dans ce cas, estimer la vitesse ne consiste pas en un simple problème d'estimation de décalage de fréquence Doppler mais en un problème d'estimation d'un facteur de compression. Le signal écho $x(t)$ peut alors se mettre sous la forme :

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{a_0}} z(a_0^{-1} t - b_0) e^{i\phi_0} + b(t) \quad (23)$$

La statistique à maximiser est donnée par le carré du module de la fonction d'inter-ambiguïté large bande (réécrite dans le domaine fréquentiel) :

$$\Lambda = \frac{a}{2\sigma^2} \left| \int_0^{+\infty} X(f) Z^*(af) e^{2i\pi abf} df \right|^2 \quad (24)$$

où les paramètres $a = (c + v)/(c - v)$ et b représentent les paramètres facteur de compression Doppler et retard à estimer. Un calcul direct de la matrice de Fisher par des méthodes classiques n'est, premièrement, pas facile à effectuer et, deuxièmement, ne conduit à aucune interprétation physique de ses coefficients, comme dans le cas bande étroite (11).

Dans le paragraphe 4 et en utilisant la Transformation de Mellin [9, 10], le calcul des coefficients de la matrice de Fisher est, d'une part, très facilité et conduit, d'autre part, à une interprétation physique de chacun de ses coefficients.

2. LA TRANSFORMATION DE MELLIN

2.1. Définition

La transformation de Mellin est définie sur le signal analytique $Z(f)$ en fréquence par la relation :

$$M^\xi[Z](\beta) = \int_0^{+\infty} Z(f) e^{2i\pi\xi f} f^{2i\pi\beta+r} df \quad (25)$$

ainsi que par sa forme réciproque :

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} M^\xi[Z](\beta) e^{-2i\pi\xi f} f^{-2i\pi\beta-r-1} d\beta \quad (26)$$

Cette transformation est unitaire, c'est à dire

$$(Z_1, Z_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} M^\xi[Z_1](\beta) M^{\xi*}[Z_2](\beta) d\beta \quad (27)$$

pour le produit scalaire invariant donné par :

$$(Z_1, Z_2) = \int_0^{+\infty} Z_1(f) Z_2^*(f) f^{2r+1} df \quad (28)$$

La transformation peut être interprétée comme le coefficient de la décomposition du signal $Z(f)$ sur une base de signaux hyperboliques $Z^\xi(f, \beta)$ définis par

$$Z^\xi(f, \beta) = e^{-2i\pi\xi f} f^{-2i\pi\beta-r-1} \quad (29)$$

dont la loi de retard de groupe est caractérisée par l'équation $t = \xi + \beta/f$.

Le paramètre réel r peut être choisi arbitrairement mais peut corriger le changement de dimension d'une quantité physique effectué lors d'une transformation affine sur le temps. Dans les paragraphes suivants, et dans le souci de préserver le produit scalaire classiquement utilisé, on impose $r = -1/2$. De plus, on choisira par simplification, le paramètre temporel ξ égal à zéro, ce qui ne revient à considérer que le cas particulier des signaux centrés autour de l'époque moyenne nulle. On notera alors par la suite $M[Z] = M^{\xi=0}[Z]$.

La principale propriété de la transformation de Mellin est la propriété d'invariance aux changements d'échelle :

$$\begin{array}{ccc} Z(f) & \xrightarrow{U_\xi} & U_\xi Z(f) = a^{r+1} e^{-2i\pi\xi(1-a)f} Z(af) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^\xi[Z](\beta) & \longrightarrow & M^\xi[U_\xi Z](\beta) = a^{-2i\pi\beta} M^\xi[Z](\beta) \end{array} \quad (30)$$

Cette propriété et la propriété d'unitarité (27) permettront par la suite de réécrire dans l'espace de Mellin la statistique Λ (24) ou la fonction d'ambiguïté (9) large bande $X(a, b)$ de manière plus intéressante.

Une autre propriété de la transformation de Mellin, très importante dans le calcul analytique des coefficients de la matrice de Fisher, est la diagonalisation de l'opérateur B défini comme :

$$BZ(f) = -\frac{1}{2i\pi} \left(f \frac{d}{df} + r + 1 + 2i\pi\xi f \right) Z(f) \quad (31)$$

qui se transforme par transformée de Mellin comme $M^\xi[BZ](\beta) = \beta M^\xi[Z](\beta)$.

2.2. La transformation de Mellin discrète

Toutes les propriétés importantes qui ont permis de construire la transformation discrète et de donner une interprétation de la variable β (paramètre d'hyperbole $t = \xi + \beta/f$ dans le plan temps-fréquence) peuvent être consultées dans [9, 10]. Cette transformée s'écrit :

$$M^\xi[Z]\left(\frac{p}{N \ln q}\right) = \ln q \sum_{k=L}^{L+N-1} q^{k(r+1)} e^{2i\pi\xi q^k} Z(q^k) e^{2i\pi \frac{kp}{N}} \quad (32)$$

où $0 \leq p \leq N-1$ et L vérifie $q^L = f_1$ avec f_1 fréquence min de Z .

La transformée de Mellin est ainsi calculée sur les échantillons géométriques du signal fréquentiel par algorithme rapide (Transformée de Fourier Rapide).

La raison géométrique q d'échantillonnage du signal Z doit vérifier une condition de non recouvrement :

$$\frac{1}{\ln q} \geq \beta_2 - \beta_1 \quad (33)$$

où $[\beta_1, \beta_2]$ est le support de $M^\xi[Z](\beta)$.

Ce support peut à première vue ne pas être facile à déterminer. En fait, l'étude des distributions temps-fréquence affines et en particulier la construction tomographique de la distribution affine unitaire de J. et P. Bertrand [13], notée $P_0(t, f)$ et d'expression

$$P_0(t, f) = f \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda(u)\lambda(-u))^{r+1} Z(f\lambda(u)) Z^*(\lambda(-u)) e^{-2i\pi f t u} du \quad (34)$$

avec

$$\lambda(u) = \frac{ue^{-u/2}}{2 \sinh u/2} \quad (35)$$

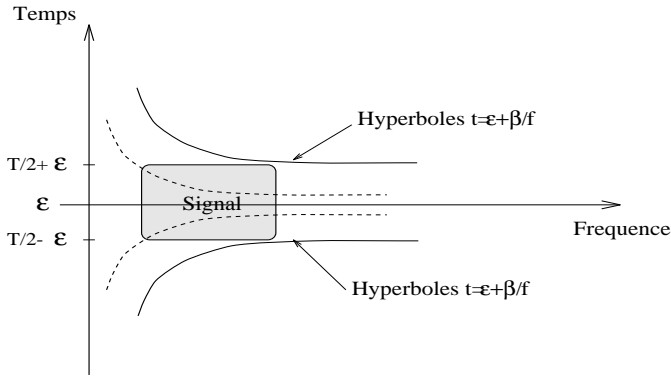
va pouvoir apporter, de manière très élégante, une solution très simple à ce problème et conduire ainsi à l'élaboration du théorème d'échantillonnage de la transformation de Mellin.

2.3. Théorème d'échantillonnage

Grâce à l'étude générale des représentations temps-fréquence affines des signaux [13] et à la formule de Moyal, la transformation de Mellin est reliée à la distribution temps-fréquence affine unitaire $P_0(t, f)$ par l'équation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} P_0(t, f) \delta(t - \xi - \beta/f) f^{2r} df = |M^\xi[Z](\beta)|^2 \quad (36)$$

Le carré du module de la transformée de Mellin du signal Z est égal à l'intégrale de sa représentation temps-fréquence affine $P_0(t, f)$ sur un réseau d'hyperboles indexées par β dans le plan temps-fréquence (transformation de Radon généralisée). Ainsi, lorsque le signal est localisé en temps et en fréquence, il existe un certain paramètre β_0 à partir duquel l'intégrale de $P_A(t, f)$ devient nulle. La transformée de Mellin d'un signal localisé en temps et en fréquence est donc elle-même localisée.



Localisation d'un signal entre les hyperboles d'équation $t = \xi + \beta_0/f$ et $t = \xi - \beta_0/f$

FIG. 1 -

Si le signal est localisé dans le plan temps-fréquence (largeur de bande B autour de la fréquence centrale f_0 , durée T), il est possible de déterminer grossièrement ce paramètre β_0 par

$$\beta_0 = (f_0 + B/2)T/2 \quad (37)$$

en ne considérant que les hyperboles qui délimitent au mieux ce signal dans le plan temps-fréquence, comme le montre la figure 1.

La condition de non recouvrement (33) s'écrit alors :

$$\frac{1}{\ln q} \geq \beta_2 - \beta_1 = 2\beta_0 \quad (38)$$

avec β_0 défini par la relation (37). Il vient :

$$\frac{1}{\ln q} \geq BT(1 + 2/R)/2 \quad (39)$$

avec BT définissant le produit bande durée du signal et R la largeur de bande relative B/f_0 .

Si le support fréquentiel de Z est $[f_1, f_2]$, la raison q doit être choisie de manière à ce que la restriction de la forme dilatocyclée \bar{Z} de Z (périodisation de Z à toutes les échelles sur le demi-axe des fréquences positives) sur $[f_1, f_2]$

$$\bar{Z}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q^{n(r+1)} Z(Q^n f) e^{2i\pi \xi f(1-Q^n)} \quad (40)$$

soit égale à Z , ce qui implique :

$$Q = q^N \geq \frac{f_2}{f_1} \quad (41)$$

Le nombre de points N qui caractérisent parfaitement $M^\xi[Z]$ est déduit de (39) et (41) :

$$N \geq BT \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{R} \right) \ln \frac{1 + R/2}{1 - R/2} \quad (42)$$

Si le signal est à bande étroite, on peut remarquer que toutes les dilatations deviennent des translations, que la transformée de Mellin devient transformée de Fourier, et que le nombre de points N devient le BT du critère de Nyquist.

Grâce au théorème d'échantillonnage et à la forme discrétisée de la transformation de Mellin, on peut alors expliciter l'algorithme de calcul de la fonction d'ambiguïté large bande.

3. CALCUL DE LA FONCTION D'AMBIGUÏTE LARGE BANDE

3.1. Principe du calcul

En utilisant la propriété d'unitarité de la transformation de Mellin (27) avec $r = -1/2$, la fonction d'ambiguïté large bande (9) $X(a, b)$ devient :

$$X(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} M[Z](\beta) M^*[U_0 Z](\beta) d\beta \quad (43)$$

avec $U_0 Z$ la transformation définie par

$$Z \rightarrow UZ(f) = \sqrt{a} e^{-2i\pi a b f} Z(a f) \quad (44)$$

L'invariance d'échelle (30) de la transformée de Mellin permet d'écrire (43) comme :

$$X(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} M[Z](\beta) M^*[Z_b](\beta) a^{2i\pi\beta} d\beta \quad (45)$$

où $Z_b(f) = Z(f) e^{-2i\pi b f}$.

De la même manière, l'équation (24) se réécrit :

$$\Lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} M[X](\beta) M^*[Z_b](\beta) a^{2i\pi\beta} d\beta \right|^2 \quad (46)$$

Le facteur de compression a n'intervient plus dans le calcul des transformations de Mellin. Pour un facteur de translation temporelle donné b , il suffit d'effectuer la transformée de Fourier inverse sur β du produit des deux transformations de Mellin pour obtenir les échantillons a .

La formule (45) discrétisée prend alors la forme suivante :

$$X(a_1 q^p, b_k) = \sum_{i=0}^{2N-1} M[Z](i) M^*[Z_{b_k}](i) e^{2i\pi \frac{ip}{2N}} \quad (47)$$

avec $a_1 = \frac{f_2}{f_1}$, $0 \leq p \leq 2N - 1$ et $0 \leq k \leq M - 1$.

La fonction d'ambiguïté peut alors être calculée par une série de Transformées de Fourier Rapides. La complexité de l'algorithme de calcul, en nombre de TFR, est donnée par $2M + 1$ TFR de $2N$ points si la fonction d'ambiguïté est discrétisée en (N, M) points sur les variables (a, b) . Cette complexité est tout à fait comparable à celle exigée pour le calcul de la fonction d'ambiguïté de Woodward.

3.2. Algorithme de calcul

Le signal Z est caractérisé par sa largeur de bande B autour de la fréquence centrale f_0 et sa durée T autour du temps $\xi = 0$. D'après le théorème d'échantillonnage, pour calculer sans recouvrement la transformée de Mellin discrète, la raison d'échantillonnage géométrique q doit satisfaire à la relation (41) avec N donné par (42).

- Etape 1 :

Echantillonnage de $Z(f)$ sur son support $[f_1, f_2]$ avec la raison $q = (f_2/f_1)^{\frac{1}{N}}$ et calcul de $M^\xi[Z](\beta)$ par transformation de Mellin discrète :

$$\begin{aligned}
Z[j] &= Z(f_1 q^j) & 0 \leq j \leq N-1 \\
T[j] &= \sqrt{f_1 q^j} Z[j] & 0 \leq j \leq N-1 \\
T[j] &= 0 & N \leq j \leq 2N-1 \\
M[p] &= \sum_{i=0}^{2N-1} T[i] e^{2i\pi \frac{ip}{2N}} & 0 \leq p \leq 2N-1
\end{aligned}$$

– Etape 2 : Pour chaque retard b_k avec $0 \leq k \leq M-1$

Echantillonnage de $Z_{b_k}(f)$ sur le même support $[f_1, f_2]$ avec la raison $q = (f_2/f_1)^{\frac{1}{N}}$ et calcul de $M[Z_{b_k}](\beta)$ par transformation de Mellin discrète :

$$\begin{aligned}
Z_k[j] &= T[j] e^{-2i\pi b_k f_1 q^j} & 0 \leq j \leq 2N-1 \\
M_k[p] &= \sum_{i=0}^{2N-1} Z_k[i] e^{2i\pi \frac{ip}{2N}} & 0 \leq p \leq 2N-1
\end{aligned}$$

Transformée de Fourier de $M^\xi[Z](\beta) M^{\xi*}[Z_{b_k}](\beta)$ sur la variable β

$$X(a_1 q^p, b_k) = \sum_{i=0}^{2N-1} M[i] M_k^*[i] e^{2i\pi \frac{ip}{2N}} \quad (48)$$

pour $0 \leq p \leq 2N-1$.

Cet algorithme est facile à mettre en œuvre et a été testé de manière très satisfaisante sur les signaux les plus couramment rencontrés dans le domaine du radar : modulation linéaire de fréquence, saut de fréquence, signal hyperbolique, etc...

4. LA MATRICE D'INFORMATION DE FISHER EN LARGE BANDE

4.1. Expression Large Bande de la Matrice d'Information de Fisher

Proposition : La Matrice d'Information de Fisher prend la forme [10, 15] :

$$J = \frac{4\pi^2 A_0^2}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \sigma_\beta^2 & f_0 \beta_0 - M \\ f_0 \beta_0 - M & \sigma_f^2 \end{pmatrix} \quad (49)$$

où les paramètres σ_f et f_0 définissent respectivement largeur de bande et fréquence centrale du signal et où les paramètres β_0 , σ_β sont donnés par :

$$\beta_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta |M[Z](\beta)|^2 d\beta \quad (50)$$

$$\sigma_\beta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\beta - \beta_0)^2 |M[Z](\beta)|^2 d\beta \quad (51)$$

Les moments du premier et du second ordre sur le carré du module de la transformée de Mellin peuvent être interprétés respectivement comme le β moyen et l'étendue du signal Z dans l'espace de Mellin. L'indice de modulation large bande noté M et défini par :

$$M = -\frac{1}{2\pi} \text{Im} \int_0^{+\infty} f^2 \frac{dZ}{df} Z^*(f) df \quad (52)$$

joue ici le même rôle pour les signaux hyperboliques que l'indice de modulation bande étroite m pour les signaux 'chirps' (signaux à modulation linéaire de fréquence). Enfin,

la quantité A_0/σ est le rapport signal à bruit.

Afin d'estimer la qualité des paramètres retard et compression, la Matrice d'Information de Fisher doit être inversée. Chaque terme de la matrice inverse J^{-1} donne la valeur minimale de la variance de chaque estimateur. Comme les estimateurs sont non biaisés et efficaces (fort rapport signal à bruit, nombre de mesures important), les bornes de Cramer-Rao sont atteintes et on obtient les résultats importants suivants :

– La variance de l'estimateur retard \hat{b} est donnée par :

$$\begin{aligned}
E[(b - \hat{b})^2] &= \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_f^2 \sigma_\beta^2 - (M - \beta_0 f_0)^2} \\
&\geq \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{1}{\sigma_f^2} \quad (53)
\end{aligned}$$

Ce premier résultat (53) montre que la résolution retard (ou distance) est, comme dans le cas bande étroite, proportionnelle à l'inverse de la largeur de bande du signal.

– La variance de l'estimateur facteur de compression \hat{a} est donnée par :

$$\begin{aligned}
E[(a - \hat{a})^2] &= \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2 \sigma_\beta^2 - (M - \beta_0 f_0)^2} \\
&\geq \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{1}{\sigma_\beta^2} \quad (54)
\end{aligned}$$

– La variance de l'estimateur vitesse \hat{v} est donnée par :

$$E[(v - \hat{v})^2] = \frac{c^2}{4} E[(a - \hat{a})^2] \quad (55)$$

Les deux résultats (54) et (55) sont très importants car ils montrent que la résolution Doppler dépend maintenant, non plus seulement de la durée du signal comme dans le cas bande étroite, mais de l'étendue du signal dans l'espace de Mellin.

– La covariance des estimateurs croisés compression-retard est donnée par :

$$E[(a - \hat{a})(b - \hat{b})] = \frac{\sigma^2}{4\pi^2 A_0^2} \frac{M - \beta_0 f_0}{\sigma_f^2 \sigma_\beta^2 - (M - \beta_0 f_0)^2} \quad (56)$$

Sous les hypothèses de Woodward, les hyperboles qui délimitent le signal dans le demi plan temps-fréquence peuvent être assimilées à des droites parallèles à l'axe des fréquences. De ce fait, les grandeurs β , β_0 , σ_β , M et $a = (c+v)/(c-v)$ peuvent être respectivement approximées par $f_0 t$, $f_0 t_0$, $f_0 \sigma_t$, $f_0 m$ et $1 + 2v/c$. En substituant ces approximations dans (54) et (55), on retrouve les résultats classiques du cas bande étroite :

$$E[(v - \hat{v})^2] = \frac{c^2 \sigma^2}{16\pi^2 A_0^2 f_0^2} \frac{\sigma_f^2}{\sigma_t^2 \sigma_f^2 - (m - f_0 t_0)^2} \quad (57)$$

4.2. Démonstration de la proposition

L'idée directrice principale du calcul des coefficients de la matrice de Fisher est d'écrire la statistique Λ (24) dans l'espace de Mellin et d'utiliser les propriétés de cette transformation. Pour simplifier la démonstration, toutes les dérivées partielles de la statistique Λ par rapport aux paramètres a et b seront évaluées au point

$O(a = a_0 = 1, b = b_0 = 0)$.

Si on note $A(a, b)$, la fonction d'inter-ambiguïté large bande usuelle écrite dans l'espace de Mellin :

$$A(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} M[X](\beta) M^*[Z_b](\beta) a^{2i\pi\beta} d\beta \quad (58)$$

toutes les dérivées partielles de A par rapport aux paramètres a et b , évaluées au point $O(a = 1, b = 0)$, conduisent, lorsqu'on utilise l'unitarité de la transformation de Mellin (27), aux expressions suivantes :

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \beta M[X](\beta) M^*[Z](\beta) d\beta \quad (59)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial a^2} = 2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(2i\pi\beta - 1) M[X](\beta) M^*[Z](\beta) d\beta \quad (60)$$

$$\frac{\partial A}{\partial b} = 2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} M[X](\beta) M^*[fZ(f)](\beta) d\beta \quad (61)$$

$$= 2i\pi \int_0^{+\infty} f X(f) Z^*(f) df \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial b} &= 2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} M[X](\beta) M^*[fZ(f)](\beta) d\beta \\ &- 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \beta M[X](\beta) M^*[fZ(f)](\beta) d\beta \end{aligned} \quad (63)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial b^2} = -4\pi^2 \int_0^{+\infty} f^2 X(f) Z^*(f) df \quad (64)$$

Le premier coefficient J_{11} de la matrice de Fisher prend alors la forme :

$$J_{11} = -\frac{1}{\sigma^2} E \left[\operatorname{Re} \left(A^* \frac{\partial^2 A}{\partial a^2} + \left| \frac{\partial A}{\partial a} \right|^2 \right) \right] \quad (65)$$

Par les relations (59) et (60), J_{11} devient :

$$\begin{aligned} J_{11} &= -\frac{1}{\sigma^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E [M[X](\beta_1) M^*[X](\beta_2)] \\ &\quad \times M[Z](\beta_1) M^*[Z](\beta_2) \\ &\quad \times [2i\pi\beta_1(2i\pi\beta_1 - 1) + 4\pi^2\beta_1\beta_2] d\beta_1 d\beta_2 \end{aligned} \quad (66)$$

Le bruit $b(t)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 . Notons $C(\beta_1 - \beta_2)$ la fonction de covariance de la transformée de Mellin de X . Il est alors facile de montrer que :

$$C(\beta_1 - \beta_2) = E [M[X](\beta_1) M^*[X](\beta_2)] \quad (67)$$

$$= A_0^2 M[Z](\beta_1) M^*[Z](\beta_2) + \sigma^2 \delta(\beta_1 - \beta_2) \quad (68)$$

tandis que la covariance $C(f_1 - f_2)$ de la transformée de Fourier est, elle, donnée par :

$$C(f_1 - f_2) = E [X(f_1) X^*(f_2)] \quad (69)$$

$$= A_0^2 Z(f_1) Z^*(f_2) + \sigma^2 \delta(f_1 - f_2) \quad (70)$$

En substituant la relation (68) dans (66), on obtient l'expression du coefficient J_{11} :

$$J_{11} = \frac{4\pi^2 A_0^2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\beta - \beta_0)^2 |M[Z](\beta)|^2 d\beta \quad (71)$$

$$= \frac{4\pi^2 A_0^2}{\sigma^2} \sigma_\beta^2 \quad (72)$$

Le calcul de l'expression du coefficient J_{22} de la matrice de Fisher est facilement effectué par :

$$J_{22} = -\frac{1}{\sigma^2} E \left[\operatorname{Re} \left(A^* \frac{\partial^2 A}{\partial b^2} + \left| \frac{\partial A}{\partial b} \right|^2 \right) \right] \quad (73)$$

et, en utilisant les relations (62) et (64), conduit à :

$$\begin{aligned} J_{22} &= \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} C(f_1 - f_2) \\ &\quad \times Z^*(f_1) Z(f_2) (f_1^2 - f_1 f_2) df_1 df_2 \end{aligned} \quad (74)$$

Lorsqu'on remplace dans (74), la covariance donnée par (70), on obtient le résultat donné par (49).

Enfin, le calcul des derniers coefficients symétriques J_{12} or J_{21} est effectué par :

$$J_{12} = -\frac{1}{\sigma^2} E \left[\operatorname{Re} \left(X^* \frac{\partial^2 X}{\partial a \partial b} + \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial X^*}{\partial b} \right) \right] \quad (75)$$

et, en utilisant les relations (59), (62) et (63), conduit à :

$$\begin{aligned} J_{12} &= -\frac{4\pi^2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\beta_1 - \beta_2) C(\beta_1 - \beta_2) \\ &\quad \times M^*[fZ(f)](\beta_1) M[Z](\beta_2) d\beta_1 d\beta_2 \end{aligned} \quad (76)$$

En substituant dans (76), l'expression de la covariance donnée en (68), l'égalité (76) devient :

$$\begin{aligned} J_{12} &= -\frac{4\pi^2 A_0^2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_1 M[Z](\beta_1) M^*[fZ(f)](\beta_1) d\beta_1 \\ &\quad + \frac{4\pi^2 A_0^2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} M[Z](\beta_1) M^*[fZ(f)](\beta_1) d\beta_1 \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_2 |M[Z](\beta_2)|^2 d\beta_2 \end{aligned} \quad (77)$$

Cette dernière expression peut être facilement réécrite dans l'espace des fréquences par la propriété d'unitarité (27) de la transformation de Mellin et celle de l'opérateur défini par l'équation (31). Ainsi, le coefficient J_{12} s'écrit :

$$\begin{aligned} J_{12} &= -\frac{4\pi^2 A_0^2}{\sigma^2} \left[\operatorname{Re} \int_0^{+\infty} BZ(f) f Z^*(f) df \right. \\ &\quad \left. + \beta_0 \int_0^{+\infty} f |Z(f)|^2 df \right] \\ &= -\frac{2\pi^2 A_0^2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} i f^2 \frac{dZ}{df} Z^*(f) df \\ &\quad + \frac{4\pi^2 A_0^2}{\sigma^2} \beta_0 f_0 \end{aligned} \quad (78)$$

En utilisant la définition de l'indice de modulation large bande M défini par (52), le résultat est enfin démontré.

La matrice de Fisher définie d'après la statistique Λ du maximum de vraisemblance est identique à la matrice constituée des différentes dérivées partielles du carré du module de la fonction d'ambiguïté large bande évaluées au voisinage de l'origine et donnée par :

$$J = -\frac{A_0^2}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 |X|^2}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 |X|^2}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial^2 |X|^2}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 |X|^2}{\partial b^2} \end{pmatrix} \quad (79)$$

où X représente la fonction d'ambiguïté large bande (9) du signal.

5. CONSTRUCTION D'UN SIGNAL LARGE BANDE OPTIMAL

Considérons un signal monochromatique donné par l'équation $Z(f) = \delta(f - f_0)$. Ce signal possède une transformée de Mellin générale donnée par :

$$M^\xi[Z](\beta) = f_0^{2i\pi\beta+r} \exp(2i\pi\xi f_0) \quad (80)$$

On peut maintenant déterminer la fréquence du signal $Z(f)$ comme fonction de la variable de Mellin définie par :

$$f_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{d\beta}\right) \quad (81)$$

où $\phi(\beta)$ est la phase de la transformée de Mellin de Z . En généralisant cette expression à tous les signaux, nous obtenons une expression valable qui régit la loi de fréquence en fonction de la variable β de Mellin :

$$f(\beta) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(\beta)}{d\beta}\right) \quad (82)$$

Notons que cette démarche est totalement calquée sur la détermination du temps de propagation de groupe (temps en fonction de la fréquence) ou de la loi de fréquence instantanée (fréquence en fonction du temps). Ainsi, étant donnée une loi de fréquence, nous pouvons calculer la phase de la transformée de Mellin et ainsi synthétiser un signal dont la transformée de Mellin est donnée par $M^\xi[Z](\beta) = \exp(i\phi(\beta))$. Cette procédure est l'analogie de celle utilisée en bande étroite pour la construction de signaux optimaux. Comme elle, elle assure seulement le fait que le signal synthétisé possède à la fois une étendue fixée dans l'espace des fréquences et de Mellin mais ne garantit en aucun cas le bon comportement de ses fonctions d'autocorrélation retard et compression (lobes secondaires très bas) données respectivement par :

$$C_1(\tau) = \int_0^{+\infty} |Z(f)|^2 e^{2i\pi f\tau} df \quad (83)$$

$$C_2(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} |M^\xi[Z](\beta)|^2 a^{2i\pi\beta} d\beta \quad (84)$$

Une voie intéressante pour ce faire est d'étendre sur (25) la méthode bande étroite de la phase stationnaire proposée dans [8] permettant de synthétiser un signal dont les fonctions d'autocorrélations retard et vitesse (fréquence Doppler) sont données.

6. CONCLUSION

La transformation de Mellin a donc un rôle déterminant en théorie du radar ou du sonar large bande que ce soit sur le plan algorithmique ou théorique. Ce papier a donné trois grandes applications de cette transformation au radar ou au sonar.

- Un algorithme performant, rapide et facile à mettre en œuvre qui permet de calculer les fonctions d'ambiguïté large bande de manière aussi aisée que celles de Woodward, a été proposé. Il est fondé sur la transformation de Mellin rapide et nécessite les échantillons géométriques en fréquence du signal. Un théorème d'échantillonnage permet de s'affranchir des problèmes de recouvrement.
- L'expression analytique des bornes de Cramer-Rao pour l'estimation de vitesse dans le cas large bande a été établie grâce à la transformation de Mellin. Le résultat le plus important concerne le fait que la résolution vitesse d'un radar (et particulièrement sonar) actif n'est plus inversement proportionnelle à la durée du signal, comme dans le cas bande étroite, mais à son étendue dans l'espace de Mellin. Cette étendue possède une interprétation physique directe dans le demi-plan temps-fréquence et peut être facilement estimée lorsque la largeur de bande, la largeur de bande relative et la durée du signal sont connues.
- Une technique intéressante de synthèse de formes d'onde possédant une loi de fréquence donnée en fonction de la variable de Mellin a été développée. Ces formes d'onde sont alors optimales au sens de la qualité de leurs fonctions d'autocorrélation retard et vitesse.

La transformation de Mellin trouve aussi son application en théorie des ondelettes, en analyse temps-fréquence [3], ainsi que dans le domaine de l'imagerie radar [11, 12].

Références

- [1] **H.L.Van Trees**, "Detection, Estimation and Modulation Theory", Part I, II and III, John Wiley and Sons, New York 1971
- [2] **A.W.Rihaczek**, "Principles of High Resolution Radar", Mc Graw-Hill, New York, 1969
- [3] **G.Jourdain**, "Synthèse de Signaux Certains dont on connaît la Fonction d'Ambiguïté du type Woodward ou de type en Compression", Ann. Tel., Vol.32, No.1-2, 1977
- [4] **J.Millet, G.Jourdain**, "Signaux à Fort Pouvoir de Résolution Temps-Fréquence. Comparaison entre les Signaux de Costas et les Signaux à Modulation de Phase BPSK", Traitement du Signal, Vol.7, No.1, 1990
- [5] **P.M.Woodward**, "Probability and Information Theory with Applications to Radar", Pergamon Press, New York 1953
- [6] **J.Bertrand P.Bertrand et J.P.Ovarlez**, "Compression d'Impulsions en Large Bande", Proc. XII Col. GRETSI, pp.21-24, Juan Les Pins, France Juin 1989
- [7] **E.J.Kelly R.P.Wishner**, "Matched Filter Theory for High Velocity Accelerating Targets", IEEE Trans. on Military Elect., Mil 9, Janvier 1965
- [8] **A.Papoulis**, "Signal Analysis", McGraw Hill, New York 1977
- [9] **J.Bertrand P.Bertrand et J.P.Ovarlez**, "Discrete Mellin Transform for Signal Analysis", Proc. IEEE-ICASSP, Albuquerque, NM, USA 1990

- [10] **J.P.Ovarlez**, "*La Transformation de Mellin : un Outil pour l'Analyse des Signaux à Large-Bande*", Thèse University Paris 6, Paris, Avril 1992.
- [11] **J.Bertrand P.Bertrand J.P.Ovarlez**, "*Dimensionalized Wavelet Transform with Application to Radar Imaging*", Proc.IEEE-ICASSP, Toronto, Canada, 1991
- [12] **J.Bertrand P.Bertrand et J.P.Ovarlez**, "*The Wavelet Approach in Radar Imaging and its Physical Interpretation*", Proc. Int. Conf. Wavelets and Applications, Toulouse, France Juin 1992
- [13] **J.Bertrand P.Bertrand**, "*Affine Time-Frequency Distributions*" dans "*Time-Frequency Signal Analysis*", Editor B.Boashash, Longman Cheshire, 1991
- [14] **J.P.Ovarlez J.Bertrand et P.Bertrand**, "*Computation of Affine Time-Frequency Distributions using the Fast Mellin Transform*", Proc. IEEE-ICASSP, San Francisco, CA, USA 1992
- [15] **J.P.Ovarlez**, "*Cramer Rao Bounds Computation for Velocity Estimation in the Broad-Band Case Using the Mellin Transform*", Proc. IEEE-ICASSP, Minneapolis, MN, USA, 1993